Université Paris Diderot – Paris 7 30/10/2018
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et J.-Y. Ducloux

M2 Mathématiques Fondamentales
Algèbres de Lie semi-simples complexes I

Un corrigé de l'examen

Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1) *Questions de cours.*

a) Définir la notion d'algèbre de Lie.

Solution : Une algèbre de Lie est un k-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ telle que pour tous X, Y et Z dans $\mathfrak{g}$, on a

a) [X,Y]=-[Y,X]

b) [X,[Y,Z]]=[[X,Y],Z]]+[X,[Y,Z]].

b) Définir la notion de $\mathfrak{g}$-module pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Solution : Un $\mathfrak{g}$-module est un espace vectoriel M muni d'une application bilinéaire $\mathfrak{g} \times M \to M$ telle que, pour tous $X \in \mathfrak{g}$ et $m \in M$, on a

$$[X, Y]m = X(Ym) + Y(Xm).$$

c) Définir la notion de morphisme entre algèbres de Lie.

Solution : Si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont des algèbres de Lie, un morphisme est une application linéaire $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ telle que $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$ pour tous X, Y dans $\mathfrak{g}$.

d) Définir la notion d'algèbre de Lie résoluble. Par quelles opérations la classe des algèbres résolubles est-elle stable ?

Solution : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On définit la série dérivée de $\mathfrak{g}$ par $D(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $D^{n+1}(\mathfrak{g}) = [D^n(\mathfrak{g}), D^n(\mathfrak{g})]$ pour $n \geq 1$. Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble s'il existe $n \geq 1$ tel que $D^n(\mathfrak{g}) = 0$. La classe des algèbres résolubles est stable par passage aux sous-algèbres, aux quotients et aux extensions.

e) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux idéaux résolubles. Montrer que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est résoluble. Indication : on pourra relier $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.

Solution : L'algèbre $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ est résoluble en tant que quotient de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est résoluble en tant qu'extension de $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{a}$.

f) Définir, sous l'hypothèse que $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, le radical $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ et la notion d'algèbre de Lie semi-simple. Montrer que $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ est semi-simple.

Solution : Le radical de $\mathfrak{g}$ est le plus grand idéal résoluble. Il est égal à la somme des idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est semi-simple si son radical s'annule. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. Alors son image réciproque $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ est résoluble en tant qu'extension de $\mathfrak{a}$ par $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. Mais alors $\mathfrak{b}$ est contenu dans $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{a}$ s'annule. Donc $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ est semi-simple.

g) Enoncer le théorème de Weyl.

Solution : Tout module de dimension finie sur une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple.

2) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie et $\mathfrak{r}$ son radical. On se propose de montrer qu'il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ (théorème de Levi).

a) Montrer que si $\mathfrak{s}$ existe, elle est semi-simple.

Solution : En effet, on a $\mathfrak{s} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$*, qui est semi-simple car* $\mathfrak{r}$ *est le radical de* $\mathfrak{g}$.

b) Dans le cas où $\mathfrak{r} = 0$, la sous-algèbre $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$ convient. On procède par récurrence sur la dimension n de $\mathfrak{r}$ en supposant la conclusion du théorème de Levi réalisée pour toute algèbre de Lie dont le radical est de dimension $< n$.

Premier cas : supposons qu'il existe un idéal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $0 \neq \mathfrak{a} \neq \mathfrak{r}$. Montrer qu'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ est semi-simple.

Solution : Le radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *est* $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}$ *(car c'est un idéal résoluble et le quotient est isomorphe à* $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$*). Par l'hypothèse de récurrence, il existe une sous-algèbre semi-simple* $\mathfrak{b}'$ *dans* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *telle que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \mathfrak{b}' \oplus \mathfrak{r}/\mathfrak{a}$*. On prend pour* $\mathfrak{b}$ *l'image réciproque de* $\mathfrak{b}'$ *dans* $\mathfrak{g}$.

c) Montrer que le radical de $\mathfrak{b}$ est $\mathfrak{a}$. Déduire qu'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{b}$ telle que $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{a}$. Montrer que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.

Solution : La sous-algèbre $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ *est résoluble en tant que sous-algèbre de* $\mathfrak{r}$ *et le quotient* $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *est semi-simple. Donc* $\mathfrak{a}$ *est le radical de* $\mathfrak{b}$*. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une sous-algèbre* $\mathfrak{s}$ *dans* $\mathfrak{b}$ *telle que* $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{a}$*. On a*

$$\mathfrak{s} + \mathfrak{r} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a} + \mathfrak{r} = \mathfrak{b} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$$

et

$$\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{s} \cap (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{r}) = 0.$$

d) 2e cas : supposons que le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{r}$. Montrer que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est semi-simple et que, si $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ est un sous-module supplémentaire de $\mathfrak{r}$, alors $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.

Solution : Comme $\mathfrak{c} = \mathfrak{r}$*, la représentation adjointe de* $\mathfrak{g}$ *est une représentation de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$*, qui est une algèbre de Lie semi-simple. Par le théorème de Weyl, la représentation adjointe est donc semi-simple. Si* $\mathfrak{s}$ *est un sous-module supplémentaire de* $\mathfrak{r}$*, on a* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ *et* $\mathfrak{s}$ *est même un idéal de* $\mathfrak{g}$*, donc en particulier une sous-algèbre.*

e) 3e cas : à partir de maintenant, on suppose que $\mathfrak{r} \neq 0$, que les seuls idéaux de $\mathfrak{g}$ contenus dans $\mathfrak{r}$ sont 0 et $\mathfrak{r}$ et que $\mathfrak{r}$ est différent de $\mathfrak{c}$. Montrer que $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = 0$ et que le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ est égal à 0.

Solution : Comme $\mathfrak{r}$ *est résoluble, on a* $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \neq \mathfrak{r}$*. Comme* $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$ *contenu dans* $\mathfrak{r}$*, on doit avoir* $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = 0$*. Comme* $\mathfrak{c}$ *est un idéal résoluble de* $\mathfrak{g}$*, il est contenu dans* $\mathfrak{r}$ *donc égal à* 0 *ou à* $\mathfrak{r}$*. Par l'hypothèse,* $\mathfrak{c}$ *est différent de* $\mathfrak{r}$ *donc égal à* 0.

f) Soit M l'espace des applications linéaires $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ telles que $u(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{r}$ et que la restriction de u à $\mathfrak{r}$ est la multiplication par un scalaire qu'on note $\lambda(u)$. Soit $N \subset M$ le sous-espace formé des u tels que $\lambda(u) = 0$. Indiquer pourquoi N est de codimension 1 dans M. Soit P l'image de $\mathfrak{r}$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Montrer que $P \subseteq N$.

Solution : Comme $\lambda(u)$ est non nul quand u est une projection sur $\mathfrak{r}$, le sous-espace N est de codimension 1 dans M. Pour $X \in \mathfrak{r}$ et $Y \in \mathfrak{g}$, on a $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ qui est dans $\mathfrak{r}$ et pour $X \in \mathfrak{r}$ et $Y \in \mathfrak{r}$, on a $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y] = 0$.

g) Soit σ la représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ des applications linéaires de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ déduite de la représentation adjointe. Vérifier que

$$\sigma(X)(u) = [\mathrm{ad}(X), u]$$

pour $X \in \mathfrak{g}$ et $u \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Montrer que $\sigma(\mathfrak{g})M \subseteq N$ et que $\sigma(\mathfrak{g})P \subseteq P$. En particulier, les espaces M, N et P sont des $\mathfrak{g}$-sous-modules de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Solution : Soient $X \in \mathfrak{g}$ et $u \in M$. Pour $Y \in \mathfrak{g}$, on a

$$\sigma(X)(u)(Y) = [\mathrm{ad}(X), u](Y) = \mathrm{ad}(X)(u(Y)) - u([X, Y] = [X, u(Y)] - u([X, Y])$$

qui appartient bien à $\mathfrak{r}$. Pour $Y \in \mathfrak{r}$, on a

$$\sigma(X)(u)(Y) = [\mathrm{ad}(X), u](Y) = [X, \lambda(u)Y] - \lambda(u)[X, Y] = 0.$$

Donc $\sigma(\mathfrak{g})M \subseteq N$. Soient $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{r}$. On a

$$\sigma(X)(\mathrm{ad}(Y)) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)] = \mathrm{ad}([X, Y])$$

qui appartient bien à P car $[X, Y] \in \mathfrak{r}$.

h) Montrer que pour $X \in \mathfrak{r}$, $Y \in \mathfrak{g}$ et $u \in M$, on a

$$(\sigma(X)u)(Y) = -\lambda(u)[X, Y] \tag{1}$$

de façon qu'on a $\sigma(\mathfrak{r})M \subseteq P$.

Solution : On a

$$(\sigma(X)u)(Y) = [\mathrm{ad}(X), u](Y) = [X, u(Y)] - u([X, Y]) = -\lambda(u)[X, Y]$$

car $[X, u(Y)]$ est dans $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = 0$ et $[X, Y]$ dans $\mathfrak{r}$.

i) Montrer que le $\mathfrak{g}$-module M/P est semi-simple et que le quotient $(M/P)/(N/P) = M/N$ est la représentation triviale.

Solution : Comme on a $\sigma(\mathfrak{r})M \subseteq P$, la représentation σ' induite par σ dans M/P s'annule sur $\mathfrak{r}$ et M/P devient un module sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, qui est semi-simple. Par le théorème de Weyl, M/P est un module semi-simple. Le quotient M/N est un $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$-module de dimension 1. D'après g), on a $\mathfrak{g}.M \subseteq N$ et M/N est donc la représentation triviale.

j) Montrer qu'il existe $u_0 \in M$ tel que $\lambda(u_0) = -1$ et $\sigma(\mathfrak{g})u_0 \subseteq P$.

Solution : Soit S/P un sous-module supplémentaire de N/P dans M/P. Alors S/P, qui est isomorphe à M/N, est la représentation triviale. La forme $\lambda : M \to k$ passe au quotient M/P en une forme linéaire de noyau N/P et donc non nulle sur S/P. On choisit u_0 comme image réciproque d'un générateur de S/P tel que $\lambda(u_0) = -1$. Alors on a $\sigma(\mathfrak{g})u_0 \subseteq P$.

k) Montrer que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, il existe un unique $\psi(X) \in \mathfrak{r}$ tel que $\sigma(X)u_0 = \mathrm{ad}\psi(X)$. Montrer que $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{r}$ est linéaire et que $\psi(X) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{r}$.

Solution : On sait que $\sigma(X)u_0$ *est dans* $\mathrm{ad}(\mathfrak{r})$. *Comme le centre* $\mathfrak{c}$ *s'annule, il existe un unique* $\psi(X)$ *and* $\mathfrak{r}$ *tel que* $\sigma(X)u_0 = \mathrm{ad}\psi(X)$. *Comme* σ *et* ad *sont linéaires, l'application* $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{r}$ *est linéaire. Par l'équation (**??**), on a* $\psi(X) = X$ *pour* $X \in \mathfrak{r}$.

l) Montrer que $\mathfrak{s} = \ker \psi$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.

Solution : Comme $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{r}$ *est une projection sur* $\mathfrak{r}$, *son noyau* $\mathfrak{s}$ *est un supplémentaire de* $\mathfrak{r}$. *Comme* $\mathfrak{s}$ *est l'ensemble des* $X \in \mathfrak{g}$ *tels que* $\sigma(X)u_0 = 0$ *et que* σ *est une représentation de* $\mathfrak{g}$, *le sous-espace* $\mathfrak{s}$ *est une sous-algèbre.*