

M2 Mathématiques Fondamentales
Algèbres de Lie semi-simples complexes II

Avertissement : Les documents, calembrets et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1) *Questions de cours.*

- a) Soient $n \geq 2$ un entier et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. (1) Exhiber une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} ; (2) décrire le système de racines associé ; (3) exhiber une base du système de racines ; (4) décrire le diagramme de Dynkin associé ; (5) décrire le groupe de Weyl.
- b) Énoncer la classification des systèmes de racines réduits irréductibles. Quel est le lien avec les algèbres de Lie simples complexes ?
- c) Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie et $U\mathfrak{g}$ son algèbre enveloppante. Énoncer le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt pour $U\mathfrak{g}$.
- d) Soit V un espace vectoriel. Rappeler la définition de l'algèbre de Lie libre sur V à l'aide d'une propriété universelle.
- e) Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On fixe une base S du système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Rappeler la définition du module de Verma $\Delta(\lambda)$ associé à une forme linéaire λ sur \mathfrak{h} et la définition du module simple $L(\lambda)$.
- f) Quel est le caractère de $\Delta(\lambda)$?
- g) À quelle condition le module $L(\lambda)$ est-il de dimension finie ? Quel est alors son caractère ? Sa dimension ?

- 2) Soit A un anneau noethérien à gauche (toute suite croissante d'idéaux à gauche devient stationnaire). Soit x un élément de A tel que la multiplication $a \mapsto ax$ est une application injective de A dans A (on dit que x est un non diviseur de 0 à droite). Soit I un idéal à gauche non nul de A . On se propose de montrer que $I \cap Ax$ est non nul.

- a) Supposons que $I \cap Ax$ est nul. Montrer que la somme

$$I + Ix + Ix^2 + \dots + Ix^n + \dots$$

est directe.

- b) Dédurre du point précédent que si $I \cap Ax$ est nul, alors $I = 0$.
- c) Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie. Montrer que l'intersection de deux idéaux à gauche non nuls I et J de $U\mathfrak{g}$ est non nulle.

- 3) Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On fixe une base S du système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On note R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{N} de racines simples. On note $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Soit λ une forme linéaire sur \mathfrak{h} .
- Soit μ une deuxième forme linéaire sur \mathfrak{h} . Montrer que tout morphisme non nul $f : \Delta(\mu) \rightarrow \Delta(\lambda)$ est injectif.
 - Montrer que deux sous-modules L et M non nuls de $\Delta(\lambda)$ ont une intersection non nulle. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.
 - Montrer que $\Delta(\lambda)$ contient un plus petit sous-module non nul V et que V est simple. Indication : on pourra utiliser un résultat du cours.
 - Montrer que V est isomorphe à $\Delta(\mu)$ pour une forme linéaire μ sur \mathfrak{h} . Indication : on pourra utiliser la question a).
 - Montrer que pour λ donné, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour μ .
- 4) On garde les notations de l'exercice précédent. Soient λ et μ deux formes linéaires sur \mathfrak{h} . On se propose de montrer que l'espace des morphismes de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$ est de dimension au plus un.
- Montrer que l'espace des endomorphismes de $\Delta(\lambda)$ est de dimension 1.
 - Soient f_1 et f_2 deux morphismes non nuls de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$ qui ont même image. Montrer qu'il existe un automorphisme g de $\Delta(\lambda)$ tel que $f_2 = f_1 \circ g$ et déduire que f_1 et f_2 sont proportionnels. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.
 - Supposons que $\Delta(\lambda)$ est simple. Soient f_1 et f_2 deux morphismes non nuls de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$. Montrer que f_1 et f_2 sont proportionnels. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.
 - Par le point d) de l'exercice précédent, il existe un module simple $\Delta(\nu)$ et un morphisme injectif $g : \Delta(\nu) \rightarrow \Delta(\lambda)$. Montrer que g induit une injection

$$\text{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \rightarrow \text{Hom}(\Delta(\nu), \Delta(\mu))$$
 et conclure.
- 5) On garde les notations de l'exercice 3). Soit d un entier supérieur ou égal à 1.
- Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de \mathfrak{g} -modules simples de dimension d .
 - On note p la moitié de la dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Construire un \mathfrak{g} -module simple de dimension d^p .