

M2 Mathématiques Fondamentales
Algèbres de Lie semi-simples complexes II

Un corrigé de l'examen

Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1) *Questions de cours.*

- a) Soient $n \geq 2$ un entier et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. (1) Exhiber une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} ; (2) décrire le système de racines associé ; (3) exhiber une base du système de racines ; (4) décrire le diagramme de Dynkin associé ; (5) décrire le groupe de Weyl.

Solution : (1) Une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} est formée par les matrices diagonales $n \times n$ de trace 0. (2) Soit $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire qui envoie une matrice diagonale sur son i -ème coefficient diagonal. Pour des entiers $1 \leq i, j \leq n$, posons $\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Alors le système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est formé des vecteurs α_{ij} , où $i \neq j$. (3) Une base de R est formé des vecteurs $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n-1,n}$. (4) Le diagramme de Dynkin est une chaîne de $n - 1$ sommets chacun lié au suivant par une arête. (5) Le groupe de Weyl s'identifie au groupe symétrique \mathfrak{S}_n agissant sur \mathfrak{h} en permutant les ε_i .

- b) Énoncer la classification des systèmes de racines réduits irréductibles. Quel est le lien avec les algèbres de Lie simples complexes ?

Solution : Les systèmes de racines réduits irréductibles sont classifiés par leurs diagrammes de Dynkin. Ces diagrammes sont listés dans la figure (1) où l'on indique en plus le nombre de Coxeter h . L'application qui, à une algèbre simple complexe, associe son système de racines induit une bijection entre les classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie simples complexes et les classes d'isomorphisme de diagrammes de Dynkin.

- c) Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie et $U\mathfrak{g}$ son algèbre enveloppante. Énoncer le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt pour $U\mathfrak{g}$.

Solution : Soient $(X_i)_{i \in I}$ une base de \mathfrak{g} sur \mathbb{C} . On choisit un ordre total sur I . Soit $j : \mathfrak{g} \rightarrow U\mathfrak{g}$ le morphisme canonique. Alors l'ensemble des monômes ordonnés en les $j(X_i)$ forme une base de $U\mathfrak{g}$ sur \mathbb{C} .

- d) Soit V un espace vectoriel. Rappeler la définition de l'algèbre de Lie libre sur V à l'aide d'une propriété universelle.

Solution : L'algèbre de Lie libre LV est munie d'une application linéaire $j : V \rightarrow LV$ telle que pour toute application linéaire $f : V \rightarrow \mathfrak{g}$ vers une algèbre de Lie \mathfrak{g} , il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : LV \rightarrow \mathfrak{g}$ tel que $\varphi \circ j = f$.

Nom	Diagramme	n	h
A_n	$\circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ$	≥ 1	$n + 1$
B_n	$\circ \xrightarrow{(2,1)} \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ$	≥ 2	$2n$
C_n	$\circ \xrightarrow{(1,2)} \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ$	≥ 3	$2n$
D_n	$\begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \circ \end{array} \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ$	≥ 4	$2n - 2$
E_6	$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ & & & & & & \\ & & & & \circ & & \end{array}$	6	12
E_7	$\begin{array}{cccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ & & & & & & & & \\ & & & & \circ & & & & \end{array}$	7	18
E_8	$\begin{array}{ccccccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & \circ & & & & & & \end{array}$	8	30
F_4	$\begin{array}{ccccc} & & & \xrightarrow{(2,1)} & \\ \circ & \text{---} & \circ & & \circ \end{array}$	4	12
G_2	$\begin{array}{ccc} & & \xrightarrow{(3,1)} \\ \circ & & \circ \end{array}$	2	6

Figure 1: Diagrammes de Dynkin

- e) Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On fixe une base S du système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Rappeler la définition du module de Verma $\Delta(\lambda)$ associé à une forme linéaire λ sur \mathfrak{h} et la définition du module simple $L(\lambda)$.

Solution : Soit R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{N} de racines simples (i.e. racines dans S). Soient

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha \quad \text{et} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

Soit \mathbb{C}_λ l'espace vectoriel \mathbb{C} muni de l'action de \mathfrak{b} telle que \mathfrak{h} agit par λ et \mathfrak{n} par 0. Le module de Verma $\Delta(\lambda)$ est le produit tensoriel $U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda$. Le module simple $L(\lambda)$ est l'unique quotient simple de $\Delta(\lambda)$.

- f) Quel est le caractère de $\Delta(\lambda)$?

Solution : Soit

$$K = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}.$$

Alors le caractère de $\Delta(\lambda)$ est Ke^λ .

- g) A quelle condition le module $L(\lambda)$ est-il de dimension finie ? Quel est alors son caractère ? Sa dimension ?

Solution : Le module $L(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement si λ est un poids dominant, c'est-à-dire qu'on a $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N}$ pour toute racine $\alpha \in S$. Son caractère est alors donné par la formule de Weyl

$$\text{ch}(L(\lambda)) = J(e^{\lambda+\rho})/J(e^\rho),$$

où ρ est la demi-somme des racines positives et J l'antisymétrisation : $J(f) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)wf$. Sa dimension est donnée par la formule de la dimension de Weyl

$$\dim(L(\lambda)) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}.$$

- 2) Soit A un anneau noethérien à gauche (toute suite croissante d'idéaux à gauche devient stationnaire). Soit x un élément de A tel que la multiplication $a \mapsto ax$ est une application injective de A dans A (on dit que x est un non diviseur de 0 à droite). Soit I un idéal à gauche non nul de A . On se propose de montrer que $I \cap Ax$ est non nul.

- a) Supposons que $I \cap Ax$ est nul. Montrer que la somme

$$I + Ix + Ix^2 + \dots + Ix^n + \dots$$

est directe.

Solution : Supposons que nous avons une relations de dépendance linéaire

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

pour des a_i dans I . Choisissons n minimal. Alors a_0 est dans $I \cap Ax = 0$ donc $a_0 = 0$ et on a la relation

$$(a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1})x = 0.$$

Comme x est un non diviseur de 0 à droite, on obtient la relation

$$a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} = 0$$

ce qui contredit la minimalité de n .

- b) Dédurre du point précédent que si $I \cap Ax$ est nul, alors $I = 0$.

Solution : Le point précédent montre que si $I \cap Ax$ est nul et I est non nul, alors la suite d'idéaux à gauche

$$I_n = I + Ix + \dots + Ix^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

est strictement croissante. Cela contredit la noethérianité à gauche de A . Donc I est nul.

- c) Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie. Montrer que l'intersection de deux idéaux à gauche non nuls I et J de $U\mathfrak{g}$ est non nulle.

Solution : On sait que l'algèbre enveloppante $A = U\mathfrak{g}$ est intègre. Comme \mathfrak{g} est de dimension finie, elle est en plus noethérienne à gauche. Soit x un élément non nul de J . Par le point précédent, l'intersection $I \cap Ax$ est non nulle. Or clairement on a $I \cap Ax \subseteq I \cap J$.

- 3) Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On fixe une base S du système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On note R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{N} de racines simples. On note $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Soit λ une forme linéaire sur \mathfrak{h} .

- a) Soit μ une deuxième forme linéaire sur \mathfrak{h} . Montrer que tout morphisme non nul $f : \Delta(\mu) \rightarrow \Delta(\lambda)$ est injectif.

Solution : Par le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, on a un isomorphisme de $U\mathfrak{n}^-$ -modules

$$\Delta(\lambda) = U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda \xleftarrow{\sim} U\mathfrak{n}^- \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = U\mathfrak{n}^-.$$

De même pour $\Delta(\mu)$. Le morphisme f donne donc lieu à un endomorphisme non nul de $U\mathfrak{n}^-$ -modules $g : U\mathfrak{n}^- \rightarrow U\mathfrak{n}^-$. Un tel endomorphisme est donné par la multiplication à droite avec l'élément non nul $g(1)$. Comme $U\mathfrak{n}^-$ est intègre, la multiplication à droite par $g(1)$ est injective. Donc f est injectif.

- b) Montrer que deux sous-modules L et M non nuls de $\Delta(\lambda)$ ont une intersection non nulle. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.

Solution : Par le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, on a un isomorphisme de $U\mathfrak{n}^-$ -modules

$$\Delta(\lambda) = U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda \xleftarrow{\sim} U\mathfrak{n}^- \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = U\mathfrak{n}^-.$$

Par cet isomorphisme, L et M s'identifient à deux idéaux à gauche non nuls de $U\mathfrak{n}^-$. Comme \mathfrak{n}^- est de dimension finie, le point c) de l'exercice précédent permet de conclure que $L \cap M$ est non nul.

- c) Montrer que $\Delta(\lambda)$ contient un plus petit sous-module non nul V et que V est simple. Indication : on pourra utiliser un résultat du cours.

Solution : On a vu en cours que tout module de Verma $\Delta(\lambda)$ contient un sous-module simple V . Si L est un sous-module non nul de $\Delta(\lambda)$, alors $L \cap V$ est non nul par le point précédent. Comme V est simple, on a $L \cap V = V$ et $V \subseteq L$. Donc V est le plus petit sous-module non nul de $\Delta(\lambda)$.

- d) Montrer que V est isomorphe à $\Delta(\mu)$ pour une forme linéaire μ sur \mathfrak{h} . Indication : on pourra utiliser la question a).

Solution : On a vu en cours que V est isomorphe à un module simple $L(\mu)$ pour un μ dans $W.\lambda$. D'où un morphisme surjectif $f : \Delta(\mu) \rightarrow V$. La composée de f avec l'inclusion $V \subset \Delta(\lambda)$ est un morphisme non nul de $\Delta(\mu)$ vers $\Delta(\lambda)$. Il est donc injectif par le point a) et on a $\Delta(\mu) = L(\mu)$.

- e) Montrer que pour λ donné, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour μ .

Solution : Comme $\Delta(\mu)$ a même caractère central que $\Delta(\lambda)$, on a $\mu \in W.\lambda$, qui est fini car W est fini.

- 4) On garde les notations de l'exercice précédent. Soient λ et μ deux formes linéaires sur \mathfrak{h} . On se propose de montrer que l'espace des morphismes de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$ est de dimension au plus un.

- a) Montrer que l'espace des endomorphismes de $\Delta(\lambda)$ est de dimension 1.

Solution : Par la propriété universelle de $\Delta(\lambda)$, l'espace $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), \Delta(\lambda))$ s'identifie avec l'espace des vecteurs de poids λ dans $\Delta(\lambda)$ qui sont annihilés par \mathfrak{n} . Or on sait que $\Delta(\lambda)^\lambda$ est de dimension 1 et annihilé par \mathfrak{n} .

- b) Soient f_1 et f_2 deux morphismes non nuls de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$ qui ont même image. Montrer qu'il existe un automorphisme g de $\Delta(\lambda)$ tel que $f_2 = f_1 \circ g$ et déduire que f_1 et f_2 sont proportionnels. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.

Solution : Par le point a) de l'exercice précédent, f_1 et f_2 sont injectifs. Comme ils ont même image, on peut définir $g(m) = f_1^{-1}f_2(m)$ pour tout m dans $\Delta(\lambda)$. Par le point précédent, g est la multiplication par un scalaire. Donc f_1 et f_2 sont proportionnels.

- c) Supposons que $\Delta(\lambda)$ est simple. Soient f_1 et f_2 deux morphismes non nuls de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$. Montrer que f_1 et f_2 sont proportionnels. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.

Solution : Comme f_1 et f_2 sont non nuls et $\Delta(\lambda)$ est simple, les images de f_1 et f_2 sont des sous-modules simples de $\Delta(\mu)$. Par le point c) de l'exercice précédent, ces images sont égales au plus petit sous-module non nul de $\Delta(\mu)$. Par le point précédent, f_1 et f_2 sont proportionnels.

- d) Par le point d) de l'exercice précédent, il existe un module simple $\Delta(\nu)$ et un morphisme injectif $g : \Delta(\nu) \rightarrow \Delta(\lambda)$. Montrer que g induit une injection

$$\text{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \rightarrow \text{Hom}(\Delta(\nu), \Delta(\mu))$$

et conclure.

Solution : Soit f un morphisme $\Delta(\lambda) \rightarrow \Delta(\mu)$ tel que $f \circ g = 0$. Alors f n'est pas injectif et doit être nul par le point a) de l'exercice précédent. Donc l'application

$$\text{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \rightarrow \text{Hom}(\Delta(\nu), \Delta(\mu)), f \mapsto f \circ g$$

est injective. Par le point précédent, l'espace à droite est de dimension ≤ 1 . Donc $\text{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu))$ est de dimension ≤ 1 .

- 5) On garde les notations de l'exercice 3). Soit d un entier supérieur ou égal à 1.
- a) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de \mathfrak{g} -modules simples de dimension d .

Solution : Soient $\omega_i, 1 \leq i \leq n$, les poids fondamentaux. Notons

$$\lambda = m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n$$

un poids dominant tel que $\dim L(\lambda) = d$. D'après la formule de la dimension de Weyl, on a

$$d \prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha) = \prod_{\alpha \in R^+} (\lambda + \rho, \alpha).$$

Clairement, on a

$$\prod_{\alpha \in R^+} (\lambda + \rho, \alpha) \geq \prod_{i=1}^n (\lambda + \rho, \alpha_i) = \prod_{i=1}^n (m_i + 1) \geq \sum_{i=1}^n m_i.$$

Comme les m_i sont des entiers positifs, cela montre qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de poids dominants $\lambda = m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n$ tels que $\dim L(\lambda) \leq d$.

- b) On note p la moitié de la dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Construire un \mathfrak{g} -module simple de dimension d^p .

Solution : Notons que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$. Comme on a $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ pour toute racine α , le nombre p est égal au cardinal de R^+ . Considérons le poids $\lambda = (d-1)\rho$. D'après la formule de la dimension de Weyl, on a

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} (\lambda + \rho)}{\prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha)} = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} (d\rho, \alpha)}{\prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha)} = d^p.$$