

M2 Mathématiques Fondamentales
Algèbres de Lie semi-simples complexes I

Un corrigé de l'examen du 30/10/2019

Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1) *Questions de cours.*

- a) Définir la notion d'algèbre de Lie.

Solution : Une algèbre de Lie est un k -espace vectoriel \mathfrak{g} muni d'une application bilinéaire $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ telle que pour tous X, Y et Z dans \mathfrak{g} , on a

a) $[X, X] = 0$

b) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$.

- b) Définir la notion de \mathfrak{g} -module pour une algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Solution : Un \mathfrak{g} -module est un espace vectoriel M muni d'une application bilinéaire $\mathfrak{g} \times M \rightarrow M$ telle que, pour tous $X \in \mathfrak{g}$ et $m \in M$, on a

$$[X, Y]m = X(Ym) - Y(Xm).$$

- c) Définir la notion d'algèbre de Lie nilpotente. Par quelles opérations la classe des algèbres de Lie nilpotentes est-elle stable ?

Solution : Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. On définit la série centrale descendante de \mathfrak{g} par $C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ et $C^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^n(\mathfrak{g})]$ pour $n \geq 1$. Alors \mathfrak{g} est nilpotente s'il existe $n \geq 1$ tel que $C^n(\mathfrak{g}) = 0$. La classe des algèbres nilpotentes est stable par passage aux sous-algèbres, aux quotients et aux extensions centrales, c'est-à-dire que si l'on a une suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \rightarrow \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{g}_3 \rightarrow 0$$

telle que \mathfrak{g}_3 est nilpotente et \mathfrak{g}_1 centrale dans \mathfrak{g}_2 , alors \mathfrak{g}_2 est nilpotente.

- d) Soit \mathfrak{g} une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ pour un espace vectoriel de dimension finie V . Énoncer une condition suffisante portant sur les endomorphismes $X \in \mathfrak{g}$ pour que \mathfrak{g} soit nilpotente (sans démonstration).

Solution : Si tous les $X \in \mathfrak{g}$ sont des endomorphismes nilpotents, alors \mathfrak{g} est nilpotente (Conséquence du premier théorème d'Engel; la réciproque est fausse).

- e) Soient $n \geq 2$ un entier et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. (1) Exhiber une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} ; (2) décrire le système de racines associé ; (3) exhiber une base du système de racines ; (4) décrire le diagramme de Dynkin associé ; (5) décrire le groupe de Weyl.

Solution : (1) Une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} est formée par les matrices diagonales $n \times n$ de trace 0. (2) Soit $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire qui envoie une matrice diagonale sur son i -ème coefficient diagonal. Pour des entiers $1 \leq i, j \leq n$, posons $\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Alors le système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est formée des vecteurs

Nom	Diagramme	n	h
A_n	$\circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ$	≥ 1	$n + 1$
B_n	$\circ \xrightarrow{(2,1)} \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ$	≥ 2	$2n$
C_n	$\circ \xrightarrow{(1,2)} \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ$	≥ 3	$2n$
D_n	$\begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \end{array}$	≥ 4	$2n - 2$
E_6	$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ & & & & & & \\ & & & & \circ & & \end{array}$	6	12
E_7	$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ & & & & & & \\ & & & & \circ & & \end{array}$	7	18
E_8	$\begin{array}{cccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ & & & & & & & & \\ & & & & \circ & & & & \end{array}$	8	30
F_4	$\circ \text{ --- } \circ \xrightarrow{(2,1)} \circ \text{ --- } \circ$	4	12
G_2	$\circ \xrightarrow{(3,1)} \circ$	2	6

Figure 1: Diagrammes de Dynkin

α_{ij} , où $i \neq j$. (3) Une base de R est formé des vecteurs $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n-1,n}$. (4) Le diagramme de Dynkin est une chaîne de $n - 1$ sommets chacun lié au suivant par une arête. (5) Le groupe de Weyl s'identifie au groupe symétrique \mathfrak{S}_n agissant sur \mathfrak{h} en permutant les ε_i .

- f) Énoncer la classification des systèmes de racines réduits irréductibles. Quel est le lien avec les algèbres de Lie simples complexes ?

Solution : Les systèmes de racines réduits irréductibles sont classifiés par leurs diagrammes de Dynkin. Ces diagrammes sont listés dans la figure (1) où l'on indique en plus le nombre de Coxeter h . L'application qui, à une algèbre simple complexe, associe son système de racines induit une bijection entre les classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie simples complexes et les classes d'isomorphisme de diagrammes de Dynkin.

- 2) Soient V un espace vectoriel et \mathfrak{g} une algèbre de Lie. On note TV l'algèbre tensorielle sur V . On notera uv le produit de deux éléments de TV . Soit A une algèbre associative unifière. On note A_{Lie} l'algèbre de Lie dont l'espace vectoriel sous-jacent est A et dont le crochet est défini par $[a, b] = ab - ba$.

- a) Rappeler la propriété universelle de l'application canonique $\text{can} : V \rightarrow TV$.

Solution : Pour toute application linéaire $f : V \rightarrow A$, il existe un unique morphisme d'algèbres unifières $\psi : TV \rightarrow A$ tel que $\psi \circ \text{can} = f$.

- b) L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ est définie comme le quotient de $T\mathfrak{g}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $XY - YX - [X, Y]$, où $X, Y \in \mathfrak{g}$. On note ι la composition $\mathfrak{g} \rightarrow T\mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ de la projection π avec l'application canonique can . Montrer que pour tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \rightarrow A_{Lie}$ il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $\varphi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ tel que $\varphi \circ \iota = f$.

Solution : L'application $f : \mathfrak{g} \rightarrow A_{Lie}$ est en particulier une application linéaire de \mathfrak{g} vers A . Il existe donc un unique morphisme d'algèbres $\psi : T\mathfrak{g} \rightarrow A$ tel que $\psi \circ \text{can} = f$. Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$\psi(XY - YX - [X, Y]) = f(X)f(Y) - f(Y)f(X) - f([X, Y]) = 0$$

car f est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow A_{Lie}$. Le morphisme $\psi : T\mathfrak{g} \rightarrow A$ s'annule donc sur l'idéal engendré par les éléments $XY - YX - [X, Y]$ et induit un unique morphisme d'algèbres $\varphi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ tel que $\varphi \circ \pi = \psi$. Il s'ensuit que $\varphi \circ \iota = f$ et que φ est unique avec cette propriété.

- c) Montrer que pour toute représentation $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, il existe une unique représentation $\varphi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_k(V)$ telle que $\varphi \circ \iota = \rho$.

Solution : Par définition, on a $\mathfrak{gl}(V) = \text{End}_k(V)_{Lie}$ et ρ est un morphisme d'algèbres de Lie. L'affirmation est alors une conséquence immédiate du point précédent.

- d) Montrer que pour tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $F : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{h})$ tel que $F \circ \iota = \iota \circ f$.

Solution : La composition $\iota \circ f : \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{h})$ est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{h})_{Lie}$. Il existe donc un unique morphisme d'algèbres $F : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{h})$ tel que $F \circ \iota = \iota \circ f$.

- e) Montrer que pour toute application linéaire $D : V \rightarrow V$, il existe une unique dérivation $\tilde{D} : TV \rightarrow TV$ dont la restriction à V est D .

Solution : Soient v_1, \dots, v_n dans V . On définit

$$\tilde{D}(v_1 \dots v_n) = \sum_{i=1}^n v_1 \dots v_{i-1} (Dv_i) v_{i+1} \dots v_n.$$

Comme \tilde{D} doit vérifier la règle de Leibniz et étendre D , c'est la seule possibilité. Il est immédiat que \tilde{D} ainsi défini est une dérivation qui étend D .

- f) Montrer que pour toute dérivation $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, il existe une unique dérivation $\bar{D} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ telle que $\bar{D} \circ \iota = \iota \circ D$. Comment décrire \bar{D} si $D = \text{ad}(X)$ pour un $X \in \mathfrak{g}$?

Solution : Par le point précédent, il existe une unique dérivation $\tilde{D} : T\mathfrak{g} \rightarrow T\mathfrak{g}$ qui étend D . Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{D}(XY - YX - [X, Y]) &= D(X)Y + XD(Y) - D(Y)X - YD(X) - [DX, Y] - [Y, DX] \\ &= (D(X)Y - YD(X) - [DX, Y]) + (XD(Y) - D(Y)X - [X, DY]). \end{aligned}$$

Donc on a $\tilde{D}(g_{X,Y}) \in I$ pour chacun des générateurs

$$g_{X,Y} = XY - YX - [X, Y]$$

de l'idéal I . Comme \tilde{D} est un dérivation, il s'ensuit que $\tilde{D}(I) \subseteq I$. Donc \tilde{D} induit une unique application linéaire $\bar{D} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ et il est clair que \bar{D} est une dérivation, vérifie $\bar{D} \circ \iota = \iota \circ D$ et est unique avec ces propriétés. Si $D = \text{ad}(X)$, on a $\bar{D} = [X, ?]$ par l'unicité.

- g) Soit $n \geq 0$. On note $U_n\mathfrak{g}$ l'image dans $U(\mathfrak{g})$ du sous-espace

$$T_n\mathfrak{g} = \mathbb{C} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes n}$$

de $T\mathfrak{g}$. Soit D une dérivation de \mathfrak{g} . Montrer que $\bar{D}(U_n(\mathfrak{g})) \subseteq U_n(\mathfrak{g})$. Montrer que si D est nilpotente, alors \bar{D} induit un endomorphisme nilpotent de $U_n(\mathfrak{g})$.

Solution : La formule explicite pour \tilde{D} montre que \tilde{D} envoie $T_n\mathfrak{g}$ dans $T_n\mathfrak{g}$. Comme \bar{D} est induite par \tilde{D} , il s'ensuit que \bar{D} envoie $U_n(\mathfrak{g})$ dans $U_n(\mathfrak{g})$. Soient X_1, \dots, X_k dans \mathfrak{g} . Par la règle de Leibniz, pour $N \geq 1$, on a

$$\bar{D}^N(X_1 \dots X_k) = \sum \binom{N}{n_1, \dots, n_k} D^{n_1}(X_1) \dots D^{n_k}(X_k),$$

où la somme porte sur toutes les décompositions

$$N = n_1 + \dots + n_k$$

de N en somme d'entiers naturels. Il s'ensuit que si $D^m = 0$, alors \bar{D}^{nm} s'annule sur $U_n(\mathfrak{g})$.

- h) Soient \mathfrak{a} et \mathfrak{b} deux sous-algèbres de Lie telles que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ comme espace vectoriel. Notons $\alpha : U(\mathfrak{a}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ et $\beta : U(\mathfrak{b}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ les prolongements des inclusions (voir d). Soit $\varphi : U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{b}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(a \otimes b) = \alpha(a)\beta(b)$$

pour $a \in U(\mathfrak{a})$ et $b \in U(\mathfrak{b})$. Montrer que φ est surjective. Indication : on pourra montrer par récurrence sur n que $U_n(\mathfrak{g})$ est contenu dans l'image de φ .

Solution : Clairement $U_0(\mathfrak{g})$ est contenu dans l'image de φ . Supposons que $n > 0$ et que nous avons montré que $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ est dans l'image de φ . Clairement $U_n(\mathfrak{g})$ est engendré sur \mathbb{C} par les Xu , où $X \in \mathfrak{g}$ et $u \in U_{n-1}(\mathfrak{g})$. Nous avons $X = A + B$ pour un $A \in \mathfrak{a}$ et un $B \in \mathfrak{b}$. Nous avons

$$Xu = (A + B)u = Au + [B, u] + uB.$$

Par l'hypothèse de récurrence, u est dans l'image de φ . Donc Au et uB le sont aussi. Comme $[B, ?] : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ est une dérivation qui étend $\text{ad}(B) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, par le point g), l'application $[B, ?]$ envoie $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ dans $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ et donc $[B, u]$ appartient à $U_{n-1}(\mathfrak{g})$, qui est dans l'image de φ par récurrence.

- 3) Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie. On se propose de montrer que \mathfrak{g} admet une représentation fidèle de dimension finie si \mathfrak{g} est semi-simple ou nilpotente.

- a) Supposons que \mathfrak{g} est semi-simple. Montrer que \mathfrak{g} admet une représentation fidèle de dimension finie.

Solution : Comme \mathfrak{g} est semi-simple son centre s'annule et sa représentation adjointe est fidèle.

- b) Supposons que $\rho_0 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_0)$ est une représentation de dimension finie dont la restriction au centre de \mathfrak{g} est fidèle. Montrer qu'il existe une représentation de dimension finie ρ_1 de \mathfrak{g} telle que la somme de ρ_0 et ρ_1 est fidèle.

Solution : Le noyau de la somme de ρ_0 et ρ_1 est l'intersection des noyaux. Donc si on prend pour ρ_1 la représentation adjointe, dont le noyau est le centre, alors le noyau de la somme est bien nul.

- c) Supposons que \mathfrak{g} est abélienne. Soit $V = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$. Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbb{C}$, on pose

$$\rho(X)(Y, t) = (tX, 0).$$

Montrer que $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation fidèle.

Solution : Clairement, pour X_1, X_2 dans \mathfrak{g} , nous avons $\rho(X_1)\rho(X_2) = 0$ ce qui implique que ρ est bien une représentation de l'algèbre de Lie abélienne \mathfrak{g} . Comme nous avons $\rho(X)(0, 1) = (X, 0)$, cette représentation est bien fidèle.

- d) A partir de maintenant, on suppose \mathfrak{g} nilpotente. On se propose de construire, par récurrence sur la dimension de \mathfrak{g} , une représentation fidèle de dimension finie ρ de \mathfrak{g} telle que $\rho(\mathfrak{g})^k = 0$ pour un $k > 0$ (cette dernière condition sera utilisée pour montrer l'hérédité). D'après c), on peut supposer \mathfrak{g} non abélienne. Soit \mathfrak{z} le centre de \mathfrak{g} . Montrer que \mathfrak{g} contient un idéal \mathfrak{a} de codimension 1 contenant \mathfrak{z} . Indication : On pourra partir d'un sous-espace de codimension 1 dans $\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$, où $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

Solution : Comme \mathfrak{g} n'est pas abélienne, \mathfrak{g}_1 est non nul. Comme \mathfrak{g}_1 est encore nilpotente, son abélianisée $\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ est non nulle. Il existe donc bien un sous-espace V de codimension 1 dans $\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ et comme cette algèbre de Lie est abélienne, V est en fait un idéal de codimension 1. Donc l'image réciproque de V dans \mathfrak{g}_1 est aussi un idéal de codimension 1 et l'image réciproque de cet idéal dans \mathfrak{g} est un idéal de codimension 1 contenant \mathfrak{z} .

- e) Montrer que \mathfrak{g} admet une sous-algèbre \mathfrak{h} telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$.

Solution : Soit \mathfrak{h} un sous-espace de \mathfrak{g} supplémentaire de \mathfrak{a} . Comme \mathfrak{h} est de dimension 1, c'est bien une sous-algèbre.

- f) Par l'hypothèse de récurrence, il existe une représentation fidèle de dimension finie ρ_0 de \mathfrak{a} telle que $\rho_0(\mathfrak{a})^{k_0} = 0$ pour un $k_0 > 0$. Pour $H \in \mathfrak{h}$, notons $D_H : U(\mathfrak{a}) \rightarrow U(\mathfrak{a})$ la dérivation telle que $D_H \circ \iota = \iota \circ \text{ad}(H)$ (voir 2 f). Pour $u \in U(\mathfrak{a})$, $H \in \mathfrak{h}$ et $A \in \mathfrak{a}$, posons

$$(H + A)u = D_H(u) + Au.$$

Montrer qu'on définit ainsi une action de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ sur $U(\mathfrak{a})$.

Solution : Soient $H, H' \in \mathfrak{h}$ et $A, A' \in \mathfrak{a}$. Notons aussi A la multiplication à gauche par A . Soit $u \in U(\mathfrak{a})$. Nous avons

$$[H' + A', H + A](u) = [D_{H'}, D_H](u) + [D_{H'}, A](u) + [A', D_H](u) + [A', A](u).$$

On a $[D_{H'}, D_H] = D_{[H', H]}$ par l'unicité de la dérivation de $U(\mathfrak{a})$ qui étend une dérivation $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$. On calcule que

$$[D_{H'}, A](u) = D_{H'}(Au) - AD_{H'}(u) = D_{H'}(A)u + AD_{H'}(u) - AD_{H'}(u) = [H', A]u.$$

De même, on a $[A', D_H](u) = [A', H]u$. On a donc bien défini une action de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ sur $U(\mathfrak{a})$.

- g) Soit I l'idéal bilatère de $U(\mathfrak{a})$ engendré par $\pi(\mathfrak{a})^{k_0}$. Montrer que $U(\mathfrak{a})/I$ est de dimension finie et que l'action de \mathfrak{h} sur $U(\mathfrak{a})$ envoie I dans I . On note π la projection canonique $U(\mathfrak{a}) \rightarrow U(\mathfrak{a})/I$.

Solution : Clairement $U(\mathfrak{a})/I$ est l'image de $U_{k_0-1}(\mathfrak{a})$ qui est de dimension finie puisque $T_{k_0-1}\mathfrak{a}$ est de dimension finie. Comme l'action de \mathfrak{h} sur $U(\mathfrak{a})$ envoie l'image de \mathfrak{a} dans elle-même et se fait par dérivations, elle envoie l'espace générateur $\pi(\mathfrak{a})^{k_0}$ dans lui-même et I dans I .

- h) Dédire que $U(\mathfrak{a})/I$ admet une structure de \mathfrak{g} -module telle que $U(\mathfrak{a}) \rightarrow U(\mathfrak{a})/I$ est un morphisme de \mathfrak{g} -modules. Notons ρ_1 la représentation associée. Montrer que la restriction de ρ_1 à \mathfrak{a} est fidèle.

Solution : Comme l'action de \mathfrak{a} par multiplication à gauche et l'action de \mathfrak{h} par dérivations laissent stable I , il en est de même de l'action combinée et le quotient $U(\mathfrak{a})/I$ hérite bien d'une structure de \mathfrak{g} -module. Comme $\rho_0(\mathfrak{a})^{k_0}$ s'annule, le morphisme $\varphi_0 : U(\mathfrak{a}) \rightarrow \text{End}_k(V_0)$ associé à ρ_0 se factorise

$$U(\mathfrak{a}) \rightarrow U(\mathfrak{a})/I \rightarrow \text{End}_k(V_0).$$

Comme ρ_0 est injectif, la restriction de ρ_1 à \mathfrak{a} est fidèle.

- i) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\rho_1(\mathfrak{h})^k = 0$. Indication : on pourra se servir de l'exercice 2 g).

Solution : Comme \mathfrak{g} est nilpotente, pour $H \in \mathfrak{h}$, l'action de $\text{ad}(H)$ dans \mathfrak{a} est nilpotente. D'après l'exercice 2 g), la dérivation D_H agit de façon nilpotente dans $U(\mathfrak{a})/I$.

- j) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\rho_1(\mathfrak{g})^k = 0$. Indication : on pourra se servir de l'exercice 2 h).

Solution : Soient B_1, \dots, B_n dans \mathfrak{g} . D'après l'exercice 2 h), il suffit de trouver $k > 0$ tel que

$$(H_1 \dots H_{k_1} A_1 \dots A_{k_2}) \cdot B_1 \dots B_n$$

s'annule dans $U(\mathfrak{a})/I$ pour $k_1 + k_2 = k$ pour tous H_i dans \mathfrak{h} et A_i dans \mathfrak{a} . Soit $N > 0$ tel que $C^N(\mathfrak{g}) = 0$. On pose $k = (N+1)k_0$. Alors si $k_1 + k_2 = k$, l'une des conditions $k_2 \geq k_0$ ou $k_1 \geq Nk_0$ est satisfaite de façon qu'on a bien l'annulation dans $U(\mathfrak{a})/I$.

- k) A partir de ρ_1 , construire une représentation fidèle ρ de \mathfrak{g} telle que $\rho(\mathfrak{g})^k = 0$ pour un $k > 0$.

Solution : Soit ρ_2 la représentation adjointe de \mathfrak{g} . Alors son noyau est \mathfrak{z} et comme \mathfrak{g} est nilpotente, il existe $k > 0$ tel que $\rho_2(\mathfrak{g})^k = 0$. Maintenant, il suffit de prendre pour ρ la somme directe de ρ_1 et ρ_2 .