Université Paris Diderot — Année 2019/2020
UFR de Mathématiques — Algèbres de Lie

I. Exercices de révision

Applications de la réduction de Jordan

1) Déterminer un ensemble $\mathscr{C}$ de matrices réelles d'ordre 2 telle que toute matrice réelle d'ordre 2 est semblable à exactement un élément de $\mathscr{C}$.

2) On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $X \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ et $g \in GL(n, \mathbb{K})$. On dira que :
– X est *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $X^p = 0$;
– X est *semi-simple* si X est diagonalisable sur $\mathbb{C}$;
– g est *unipotente* si $g - I$ est nilpotente.

a) Démontrer qu'il existe $(X_s, X_n) \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})^2$ unique tel que :
$X = X_s + X_n$, $X_s X_n = X_n X_s$, X_s est semi-simple et X_n est nilpotente.
Vérifier en même temps que X_s et X_n sont des polynômes de X sur $\mathbb{K}$.

b) Démontrer qu'il existe $(g_S, g_U) \in GL(n, \mathbb{K})^2$ unique tel que :
$g = g_S g_U$, $g_S g_U = g_U g_S$, g_S est semi-simple et g_U est unipotente.
Vérifier en même temps que g_S et g_U sont des polynômes de g sur $\mathbb{K}$.

relié aux sous-groupes maximaux des groupes de Lie

3) Soient $X \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ et $g \in GL(n, \mathbb{R})$. On dira que :
– X est *infinitésimalement elliptique* (resp. *hyperbolique*) si X est semi-simple de valeurs propres complexes dans $\mathrm{i}\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{R}$) ;
– g est *elliptique* (resp. *positivement hyperbolique*) si g est semi-simple de valeurs propres complexes de module 1 (resp. réelles strictement positives).

a) Démontrer qu'il existe $(X_e, X_h, X_n) \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})^3$ unique tel que :
$X = X_e + X_h + X_n$, X_e et X_h et X_n commutent, X_e est infinitésimalement elliptique, X_h est hyperbolique et X_n est nilpotente.
Vérifier en même temps que X_e, X_h et X_n sont des polynômes de X.

b) Démontrer qu'il existe $(g_E, g_H, g_U) \in GL(n, \mathbb{R})^3$ unique tel que :
$g = g_E g_H g_U$, g_E et g_H et g_U commutent, g_E est elliptique, g_H est positivement hyperbolique et g_U est unipotente.
Vérifier en même temps que g_E, g_H et g_U sont des polynômes de g.

Cardinaux des bases d'un module libre

(curiosité)

4) Soient A un anneau et M un A-module libre.

a) On suppose que A est commutatif et $A \neq \{0\}$.
On admet les deux résultats suivants :
(i) Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{a} \neq A$, il existe un idéal $\mathfrak{M}$ de A différent de A maximal pour l'inclusion et qui contient $\mathfrak{a}$.
(ii) Pour tout idéal $\mathfrak{M}$ de A différent de A maximal pour l'inclusion, l'anneau quotient $A/\mathfrak{M}$ est un corps.
Démontrer que toutes les bases de M ont un même cardinal, noté $\mathrm{rg}_A(M)$.

b) On choisit ici : $A = \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ (endomorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$) muni de la composition, et $M = A$.
Démontrer que le A-module M est libre de bases $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ et (v, w) où :
$$v(X^{2n}) = X^n \text{ et } w(X^{2n}) = 0,\ v(X^{2n+1}) = 0 \text{ et } w(X^{2n+1}) = X^n.$$

Produit tensoriel

5) Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On lui associe le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$.
Par définition, on a $\alpha(\lambda \otimes v) = (\alpha\lambda) \otimes v$ pour tous $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in V$.
   a) Soit $(v_j)_{j\in J}$ est une base de V sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $(1 \otimes v_j)_{j\in J}$ est une base de $V_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$.
   b) Démontrer que l'application $\begin{array}{rcl} V & \to & V_{\mathbb{C}} \\ v & \mapsto & 1 \otimes v \end{array}$ est injective et $\mathbb{R}$-linéaire.
   c) Démontrer que pour toute application $\mathbb{R}$-linéaire f de V dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, il existe une unique application $\mathbb{C}$-linéaire $f_{\mathbb{C}} \colon V_{\mathbb{C}} \to E$ qui « prolonge » f.

6) a) En considérant l'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[Y] & \to & \mathbb{C}[X,Y] \\ (P,Q) & \mapsto & P(X)Q(Y) \end{array}$ construire un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Y]$ sur $\mathbb{C}[X,Y]$.
   b) Exhiber $U \in \mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Y]$ tel que $U \neq P \otimes Q$ pour tous $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[Y]$.

7) Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On se donne une base $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_p)$ de E et une base $\mathscr{C} = (w_1, ..., w_q)$ de F.
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(F)$. On pose $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(g)$.
   a) Déterminer la matrice M de $f \otimes g$ dans $\mathscr{U} = (v_1 \otimes w_1, ..., v_1 \otimes w_q; ...; v_p \otimes w_1, ..., v_p \otimes w_q)$.
   b) Déterminer la matrice N de $f \otimes g$ dans $\mathscr{V} = (v_1 \otimes w_1, ..., v_p \otimes w_1; ...; v_1 \otimes w_q, ..., v_p \otimes w_q)$.
   c) Calculer $\mathrm{tr}(f \otimes g)$ et $\det(f \otimes g)$ à l'aide de $\mathrm{tr}(f)$, $\mathrm{tr}(g)$, $\det(f)$, $\det(g)$.

Algèbre extérieure du dual en dimension finie

8) Soient E un espace vectoriel non-nul de dimension finie n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $p \in \{1, ..., n\}$.
On appelle « forme p-linéaire alternée sur E » une application multilinéaire $f \colon E^p \to \mathbb{K}$ *telle que* $f(v_1, ..., v_p) = 0$ *quand deux des vecteurs* $v_1, ..., v_p \in E$ *sont égaux.*
Cela équivaut à la condition suivante (« f est une forme p-linéaire antisymétrique sur E ») :
$$f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, ..., v_p) \text{ pour tous } \sigma \in \mathfrak{S}_p \text{ et } v_1, ..., v_p \in E.$$
On note $\mathscr{A}^p(E)$ *l'ensemble des formes p-linéaires alternées sur E.*
Soit $(e_1, ..., e_n)$ *une base de E. On admet que* $\mathscr{A}^p(E)$ *a une base* $(e^*_{i_1,...,i_p})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$ *qui est déterminée par les conditions :*
$$e^*_{i_1,...,i_p}(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) = 1 \text{ et, } e^*_{i_1,...,i_p}(e_{j_1}, ..., e_{j_p}) = 0 \text{ si } j_1 < ... < j_p \text{ et } (j_1, ..., j_p) \neq (i_1, ..., i_p).$$
Construire une application linéaire bijective $\varphi_p \colon \Lambda^p(E^*) \to \mathscr{A}^p(E)$ telle que :
$$\varphi_p(f_1 \wedge ... \wedge f_p)(v_1, ..., v_p) = \det\big((f_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq p}\big) \text{ pour } f_1, ..., f_p \in E^* \text{ et } v_1, ..., v_p \in E. \text{ (*)}$$

9) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non-nul de dimension finie de base $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$.
   a) On appelle « densité C^∞ à support compact sur E » une application de classe C^∞ $\rho \colon E \times \big((\Lambda^n E) \setminus \{0\}\big) \to \mathbb{C}$ telle que $\rho(x, v) = 0$ pour x hors d'un compact et :
   $$\rho(x, \lambda v) = |\lambda| \rho(x, v) \text{ pour tous } x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ et } v \in (\Lambda^n E) \setminus \{0\}.$$
   Dans ce cas, on pose : $\int_{\mathscr{B},E} \rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_1 e_1 + ... + x_n e_n, e_1 \wedge ... \wedge e_n)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n$.
   Démontrer que $\int_{\mathscr{B},E} \rho$ ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$. On le notera donc $\int_E \rho$.
   b) On appelle « forme différentielle à support compact de degré maximal sur E » une application C^∞ à support compact $\omega \colon E \to \mathscr{A}^n(E)$.
   Dans ce cas, on pose : $\int_{\mathscr{B},E} \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x_1 e_1 + ... + x_n e_n)(e_1, ..., e_n)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n$.
   Montrer que les valeurs de $\int_{\mathscr{B},E} \omega$ obtenues en faisant varier $\mathscr{B}$ sont $\int_{\mathscr{B},E} \omega$ et $-\int_{\mathscr{B},E} \omega$.

(*) On note $\wedge$ le produit sur $\mathscr{A}(E) := \bigoplus \mathscr{A}^p(E)$ obtenu en transportant le produit de $\Lambda(E^*)$ à l'aide de l'isomorphisme d'espace vectoriels entre $\Lambda^p(E^*)$ et $\mathscr{A}(E)$ qui vient d'être construit. On peut démontrer que :
$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, ..., v_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \\ \sigma(1) < ... < \sigma(p) \\ \sigma(p+1) < ... < \sigma(p+q)}} \varepsilon(\sigma)\, \alpha(v_1, ..., v_p)\, \beta(v_{p+1}, ..., v_{p+q}) \text{ pour } \alpha \in \mathscr{A}^p(E), \beta \in \mathscr{A}^q(E) \text{ et } v_1, ..., v_{p+q} \in E.$$