II. Groupes de Lie connexes de dimension ≤ 3

Algèbres de Lie non-commutatives de dimension ≤ 3

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle non-commutative de dimension ≤ 3.

1) On se place dans le cas où $\dim \mathfrak{g} = 2$.
   a) Démontrer que $\dim \mathrm{D}(\mathfrak{g}) = 1$.
   b) Soit $X \in \mathrm{D}(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$. Démontrer que $\mathfrak{g}$ a une base (X, Y) telle que $[X, Y] = -X$.
   c) En déduire que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{ga}(\mathbb{R}) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
   (L'algèbre de Lie $\mathfrak{ga}(\mathbb{R})$ est « l'algèbre de Lie du groupe affine de $\mathbb{R}$ ».)

2) On se place dans le cas où $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathrm{D}(\mathfrak{g}) = 1$.
   Soit $X \in \mathrm{D}(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$.
   a) Démontrer que $\dim \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = 1$.
   b) On suppose que $\mathrm{D}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$.
   Démontrer que $\mathfrak{g}$ a une base $\overbrace{(X, Y, Z)}^{(E, Q, P)}$ telle que $[X, Y] = 0$, $[Z, X] = 0$, $[Z, Y] = X$.
   En déduire que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{h}_3 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) ; x, y, t \in \mathbb{R} \right\}$
   (L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_3$ est « l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg de dimension 3 ».)
   c) On suppose que $\mathrm{D}(\mathfrak{g}) \neq \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$.
   Démontrer que $\mathfrak{g}$ a une base (X, Y, Z) telle que $[X, Y] = 0$, $[Z, X] = X$, $[Z, Y] = 0$.
   En déduire que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathfrak{ga}(\mathbb{R})$.

3) On se place dans le cas où $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathrm{D}(\mathfrak{g}) = 2$.
   Soit (X, Y) une base de $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$.
   a) Démontrer que $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ est commutative (compléter (X, Y) en une base (X, Y, Z) de $\mathfrak{g}$).
   b) Démontrer que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à une unique algèbre de Lie de la forme
   $\mathbb{R} \ltimes_A \mathbb{R}^2 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} tA & v \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) ; t \in \mathbb{R} \text{ et } v \in \mathbb{R}^2 \right\}$ avec $A \in \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)\}_{0<|\alpha|\leq 1} \cup \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\} \cup \left\{\left(\begin{smallmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{smallmatrix}\right)\right\}_{\beta \geq 0}$.
   Indication : introduire la matrice A de $(\operatorname{ad} Z)|_{\mathrm{D}(\mathfrak{g})}$ dans la base (X, Y).

4) On se place dans le cas où $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathrm{D}(\mathfrak{g}) = 3$.
   On fixe une base $\mathscr{B}$ de $\mathfrak{g}$ et note $\wedge$ le produit vectoriel euclidien associé à $\mathscr{B}$.
   On introduit $f \in \mathscr{L}(\mathfrak{g})$ telle que $[X, Y] = f(X \wedge Y)$ pour $X, Y \in \mathfrak{g}$.
   a) Démontrer que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}} f$ est symétrique, puis qu'on se trouve dans l'un des deux cas :
   (i) $\mathfrak{g}$ a une base (X, Y, Z) telle que $[X, Y] = Z$, $[Y, Z] = X$, $[Z, X] = Y$
   puis $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{so}(3) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$;
   (ii) $\mathfrak{g}$ a une base (X, Y, Z) telle que $[X, Y] = Z$, $[Y, Z] = -X$, $[Z, X] = Y$
   puis $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{so}(1, 2) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x_2 & x_1 \\ -x_2 & 0 & x_0 \\ x_1 & -x_0 & 0 \end{pmatrix} ; x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.
   b) Vérifier que les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{so}(1, 2)$ ne sont pas isomorphes.

5) a) Parmi ces représentants des classes d'isomorphisme de sous-algèbres de Lie réelles de dimension ≤ 3, lesquels sont nilpotents ? résolubles ? semi-simples ? de centre nul ?
   b) Démontrer que le groupe connexe $GL(2, \mathbb{C})$ ne se décompose pas en produit semi-direct entre ses sous-groupes intégraux associés à la décomposition de Levi-Malcev de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$.
   c) Déterminer la décomposition de Mostow du groupe linéaire algébrique suivant :
   $$GA(\mathbb{R}) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) ; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ et } b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{« groupe affine de } \mathbb{R} \text{ ».}$$

Groupes de Lie commutatifs connexes de dimension ≤ 3

6) a) Démontrer que les sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$ sont les $\mathbb{Z}v_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}v_q$ avec $0 \leq q \leq n$ et $(v_1, ..., v_n)$ base de $\mathbb{R}^n$.

b) En déduire les classes d'isomorphisme des groupes de Lie réels connexes commutatifs de dimension ≤ 3.

Groupes de Lie résolubles connexes non-commutatifs de dimension ≤ 3

7) On fixe $A \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$ et pose $\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} tA & v \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \; ; \; t \in \mathbb{R} \text{ et } v \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a) Démontrer que le sous-groupe intégral G de $GL(3, \mathbb{R})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est fermé.

b) Le groupe G est-il simplement connexe ?

c) Déterminer le centre de G.

8) On pose : $\mathfrak{h}_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \; ; \; x, y, t \in \mathbb{R} \right\}$ et $H_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \; ; \; x, y, t \in \mathbb{R} \right\}$.

(Le groupe de Lie H_3 est « le groupe de Heisenberg de dimension 3 ».)

Soit Γ un sous-groupe discret discret non-trivial du centre de H_3. Démontrer que le groupe de Lie H_3/Γ n'est isomorphe à aucun sous-groupe de Lie d'un $GL(n, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$.

9) On pose : $\mathfrak{so}(2) \ltimes \mathbb{R}^2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & -t & x \\ t & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) ; x, y, t \in \mathbb{R} \right\}$ et $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t & x \\ \sin t & \cos t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) ; x, y, t \in \mathbb{R} \right\}$.

(Le groupe de Lie $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ est « le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$ ».)

a) Démontrer que $G = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ admet un revêtement universel $\widetilde{G}$ qui est un sous-groupe de Lie de $GL(4, \mathbb{R})$.

b) Déterminer le centre de $\widetilde{G}$.

c) Vérifier que $\exp_G$ est surjective, mais que $\exp_{\widetilde{G}}$ n'est pas surjective.

Groupes de Lie semi-simples connexes de dimension ≤ 3

10) On pose : $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$ et $\mathfrak{so}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$.

a) Démontrer à l'aide du point de vue des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$ que $SL(n, \mathbb{R})$ et $SO(n)$ sont des sous-groupes de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ d'algèbres de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{so}(n)$.

b) Retrouver le résultat précédent à l'aide du théorème de Von Neumann et de l'application exponentielle.

11) On pose : $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \; ; \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = SO(3)$.

a) Vérifier que G a pour revêtement universel le groupe de Lie $SU(2) := \mathbb{H}_u{}^{(*)}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2) := \mathrm{i}\mathbb{R} + \mathrm{j}\mathbb{R} + \mathrm{k}\mathbb{R}$ muni de l'application $p \colon \begin{array}{ccc} SU(2) & \to & SO(3) \\ q & \mapsto & \mathfrak{Mat}_{(-\mathrm{k},\mathrm{j},\mathrm{i})}(\operatorname{Ad} q) \end{array}$.

Indication : on admet que la sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ est simplement connexe si $n \geq 2$.

b) Déterminer le centre de $SU(2)$.

12) On verra dans une prochaine feuille d'exercices que :
(i) $SL(2, \mathbb{R})$ est connexe ;
(ii) l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1, 2)$ de l'exercice 4 est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$;
(iii) le centre du revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ de $SL(2, \mathbb{R})$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Déterminer une famille de représentants non-isomorphes des classe d'isomorphismes des groupes de Lie réels connexes de dimension ≤ 3.

(*) On note : $\mathbb{H} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{smallmatrix} \right) \; ; \; a, b \in \mathbb{C} \right\}$ et identifie $a \in \mathbb{C}$ à $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix} \right)$. On introduit : $\mathrm{j} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} \right)$ et $\mathrm{k} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix} \right)$. On admet que $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$, donc $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathrm{i}\mathbb{R} + \mathrm{j}\mathbb{R} + \mathrm{k}\mathbb{R}$ est un corps non-commutatif « corps des quaternions ». On note $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$ lorsque $q = \left(\begin{smallmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{smallmatrix} \right)$, puis $\mathbb{H}_u := \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$.