Université Paris Diderot — Année 2019/2020
UFR de Mathématiques — Algèbres de Lie

III. Action adjointe et décompositions de $SL(2,\mathbb{R})$

Classes de conjugaison et orbites adjointes de $SL(2,\mathbb{R})$

On note : $SL(2,\mathbb{R}) = \{g \in GL(2,\mathbb{R}) \mid \det g = 1\}$ et $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$.

1) a) Démontrer que $SL(2,\mathbb{R})$ est connexe.

b) Construire des représentants des classes d'isomorphisme de $SL(2,\mathbb{R})$-modules simples de dimension finie obtenus au moyen de représentations de classe C^∞.(*)

2) a) Déterminer des représentants non conjugués de $\operatorname{int}(SL(2,\mathbb{R}))\backslash SL(2,\mathbb{R})$.

b) Déterminer des représentants non conjugués de $\operatorname{Ad}(SL(2,\mathbb{R}))\backslash\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.
Dessiner l'orbite adjointe de $\begin{pmatrix} x_1 & x_2+x_0 \\ x_2-x_0 & -x_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ dans les coordonnées x_1, x_2, x_0.

3) On pose dans cet exercice : $G = SL(2,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

a) Démontrer que les sous-algèbre commutatives maximales $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ sont de dimension 1.

b) Soit $\operatorname{Car}\mathfrak{g}$ l'ensemble des sous-algèbres commutatives maximales $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que les $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X$, $X \in \mathfrak{h}$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ (« sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ »).
Déterminer des représentants non conjugués de $\operatorname{Ad} G\backslash \operatorname{Car}\mathfrak{g}$.

Comparaison de $SL(2,\mathbb{R})$, $SU(1,1)$ et $O(1,2)$

On note : $SU(1,1) = \left\{g \in SL(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^t\overline{g}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

et $\mathfrak{su}(1,1) = \left\{X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^t\overline{X} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$;

$O(1,2) = \left\{g \in GL(3,\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^t g\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

et $\mathfrak{o}(1,2) = \left\{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^t X = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \mathfrak{so}(1,2)$.

4) On pose : $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$.
Démontrer que : $SU(1,1) = (\operatorname{int} C)(SL(2,\mathbb{R}))$ et $\mathfrak{su}(1,1) = (\operatorname{Ad} C)(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$.

5) a) On note $\mathscr{B}$ la base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ dans laquelle $\begin{pmatrix} x_1 & x_2+x_0 \\ x_2-x_0 & -x_1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées x_0, x_1, x_2.
Construire un morphisme de groupes de Lie bijectif $\dot g \mapsto \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\operatorname{Ad} g)$ du groupe de Lie quotient $SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I\}$ sur la composante connexe $SO_0(1,2)$ de I dans $O(1,2)$.
Indication : on pourra admettre que $\mathfrak{o}(1,2)$ est l'algèbre de Lie de $O(1,2)$.

b) Construire des représentants des classes d'isomorphisme de $SO_0(1,2)$-modules simples de dimension finie obtenus au moyen de représentations de classe C^∞.

Décomposition polaire et dessin de $SL(2,\mathbb{R})$

On note : $U(2) = \{g \in GL(2,\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g}g = I\}$ et $SO(2) = \{g \in SL(2,\mathbb{C}) \mid {}^t g g = I\}$,
H^+ l'ensemble des $g \in GL(2,\mathbb{C})$ vérifiant ${}^t\overline{g} = g$ et de valeurs propres > 0
et S^+ l'ensemble des éléments de $GL(2,\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t g = g$ et de valeurs propres > 0.

6) Un calcul facile montre que :
$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \;;\; a, b \in \mathbb{C} \text{ et } |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$ et $\mathfrak{su}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \;;\; a \in \mathrm{i}\mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{C} \right\}$.

a) Décrire $U(2) \cap SU(1,1)$ et $H^+ \cap SU(1,1)$.

b) Démontrer que $\begin{array}{ccc} \big(U(2) \cap SU(1,1)\big) \times \big(H^+ \cap SU(1,1)\big) & \to & SU(1,1) \\ (u,h) & \mapsto & uh \end{array}$ est bijective.

c) En déduire la bijection $\begin{array}{ccc} SO(2) \times \big(S^+ \cap SL(2,\mathbb{R})\big) & \to & SL(2,\mathbb{R}) \\ (k,s) & \mapsto & ks \end{array}$ « décomposition polaire ».

(*) Les classes d'isomorphismes des $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modules simples de dimension finie sont celles des $S^k(\mathbb{C}^2)$, $k \in \mathbb{N}$.

7) On pose $g \cdot z = \frac{az+c}{bz+d}$ pour $g = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{C})$ et $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

a) Démontrer que cette action du groupe $SL(2,\mathbb{C})$ par homographies sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se restreint en une action du groupe $SU(1,1)$ sur $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

b) En déduire que $H^+ \cap SU(1,1)$ est canoniquement en bijection avec D.

Indication : considérer l'orbite et le stabilisateur de 0 pour l'action de $SU(1,1)$ sur D.

8) On note $\mathbb{C}_u$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On schématise $\mathbb{C}_u \times D$ en plaçant le point $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, x+\mathrm{i}y) \in \mathbb{C}_u \times D$ au niveau de l'image de $(x+3,0,y)$ par la rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz).

Déduire des deux exercices précédents une illustration qui représente les classes de conjugaison de $SL(2,\mathbb{R})$ à l'intérieur de $\mathbb{C}_u \times D$.

Décompositions d'Iwasawa, de Cartan, et de Bruhat

On note : $K = SO(2)$, $M = \{\pm I\}$, $A = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \; ; \; a > 0\right\}$, $N = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \; ; \; c \in \mathbb{R}\right\}$
et $B = MAN = \{man \; ; \; m \in M, a \in A, n \in N\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \; ; \; a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ et } c \in \mathbb{R}\right\}$.

9) Soient H un groupe de Lie, S et T deux sous-groupes de Lie de H.

On suppose que les algèbres de Lie $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, de H, S, T vérifient : $\mathfrak{h} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$.

Démontrer que l'application produit $\pi \colon S \times T \to H$ est un difféomorphisme local.

Indication : dériver $(s_0 t_0)^{-1}\pi\big(s_0 \exp(u \underbrace{X}_{\in\,\mathfrak{s}}), t_0\big)$ et $(s_0 t_0)^{-1}\pi\big(s_0, t_0 \exp(u \underbrace{Y}_{\in\,\mathfrak{t}})\big)$ en $u = 0$.

10) a) Démontrer que l'application produit de $K \times A \times N$ dans $G = SL(2,\mathbb{R})$ est un difféomorphisme « décomposition d'Iwasawa ».

Indication : considérer l'orbite de ∞ sous K pour l'action par homographies sur $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

b) Démontrer que l'application produit de $K \times A \times K$ dans $G = SL(2,\mathbb{R})$ est surjectif « décomposition de Cartan ».

Indication : vérifier que $SL(2,\mathbb{R})$ opère par homographies sur $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, puis considérer l'orbite de i, qu'on obtient à l'aide du 7 (b), et le stabilisateur de i.

11) Soit $\widetilde{G}$ « le» revêtement universel de $G = SL(2,\mathbb{R})$.(*)

a) Démontrer que le sous-groupe $\mathrm{Z}(\widetilde{G})$ de $\widetilde{G}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Indication : $\mathrm{Z}(SO_0(1,2)) = \{I\}$ et $\Pi_1(SO_0(1,2)) = \mathbb{Z}$ par sa décomposition d'Iwasawa.

b) En déduire que le groupe $\widetilde{G}$ n'est pas linéaire au sens où il n'existe aucune représentation de classe C^∞ injective de $\widetilde{G}$ dans un espace vectoriel de dimension finie.

12) Démontrer que $G = SL(2,\mathbb{R})$ est réunion disjointe de B et de BwB, où $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ « décomposition de Bruhat ».

Indication : considérer les orbites de ∞ et $w\infty$ sous N pour l'action par homographies.

(*) On peut donner, sans que cela soit utile, une construction d'un revêtement universel de $G = SL(2,\mathbb{R})$. On souhaite qu'il admette comme « décomposition d'Iwasawa » $\mathbb{R}AN$ où $AN := \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \; ; \; a > 0 \text{ et } c \in \mathbb{R}\right\}$.

Soient $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus\{0\}$, des droites vectorielles U, V, W de $\mathbb{R}^2$, et $t \in \mathbb{R}$. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et note :

$$s(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in \mathbb{R}^+ \cdot u \\ \text{-}1 & \text{si } v \in \mathbb{R}^- \cdot u \\ \mathrm{i} & \text{si } (u,v) \text{ est base directe de } \mathbb{R}^2 \\ \text{-i} & \text{si } (u,v) \text{ est base indirecte de } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau(U,V,W) = \begin{cases} 0 & \text{si } U,V,W \text{ ne sont pas distinctes} \\ 1 & \text{si on passe de } U \text{ à } V \text{ à } W \text{ en sens direct} \\ \text{-}1 & \text{si on passe de } U \text{ à } V \text{ à } W \text{ en sens indirect} \end{cases},$$

$$\text{et} \quad \mu(t) = \begin{cases} 2\mathrm{k} & \text{si } t = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ 2\mathrm{k}{+}1 & \text{si } k\pi < t < k\pi + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

On munit $\widetilde{G} := \left\{(x,m) \in G \times \mathbb{Z} \mid s(1,x1) = \mathrm{i}^m\right\}$ de la loi $(x,m)\cdot(y,n) := (xy, m+n+\tau(\mathbb{R}, x\mathbb{R}, xy\mathbb{R}))$ et de la structure de variété C^∞ pour laquelle l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times AN & \to & \widetilde{G} \\ (\theta, b) & \mapsto & (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, -\mu(\theta)) \cdot (b,0) \end{array}$ est un difféomorphisme.

On constate que le morphisme de groupes de Lie $\mathrm{pr}_1 \colon \widetilde{G} \to G$ est un revêtement universel.