IV. Groupes de Lie « classiques »

Application exponentielle de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ dans $GL(n,\mathbb{C})$

On considère dans les deux premiers exercices un groupe de Lie réel G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

On rappelle que l'application $\exp\colon \mathfrak{g}\to G$ est C^∞ et déterminée par les conditions : $\exp((s+t)X)=\exp(sX)\exp(tX)$ pour $s,t\in\mathbb{R}$ et $X\in\mathfrak{g}$, et, $\frac{d}{dt}\big(\exp(tX)\big)\big|_{t=0}=X$ pour $X\in\mathfrak{g}$.(*)

Elle vérifie : $\exp(X+Y)=\exp X\exp Y$ quand $X,Y\in\mathfrak{g}$ et $[X,Y]=0$.

1) On note : $m\colon \begin{array}{l} G\times G\to G \\ (x,y)\mapsto xy\end{array}$, ainsi que $(g\,\cdot)\colon \begin{array}{l} G\to G\\ x\mapsto gx\end{array}$ et $(\cdot\, g)\colon \begin{array}{l} G\to G\\ x\mapsto xg\end{array}$. pour $g\in G$.

   a) Soient $a,b\in G$, $u\in T_aG$ et $v\in T_bG$.
   Démontrer que : $T_{(a,b)}m\cdot(u,v)=ub+av$, où $ub:=T(\,\cdot\, b)\cdot u$ et $av:=T(a\,\cdot\,)\cdot v$.

   b) Soient M une variété C^∞ et $a,b\colon M\to G$. On pose $(ab)(x)=a(x)\,b(x)$ pour $x\in M$.
   Soit $x\in M$. On suppose que a et b sont différentiables en x.
   Déduire du (a) que : $T_x(ab)\cdot h=(T_xa\cdot h)\,b(x)+a(x)\,(T_xb\cdot h)$ pour tout $h\in T_xM$.

2) On fixe $X\in\mathfrak{g}$.

   a) Sachant que $\frac{1-e^{-z}}{z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-z)^n}{(n+1)!}$ pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, on note : $\frac{1-e^{-\operatorname{ad}X}}{\operatorname{ad}X}:=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\operatorname{ad}X)^n}{(n+1)!}$.
   Démontrer que : $\boxed{T_X\exp=T_1((\exp X)\,\cdot\,)\circ\frac{1-e^{-\operatorname{ad}X}}{\operatorname{ad}X}}$.
   Indication : l'application $\varphi\colon t\mapsto (T_1((\exp(tX))\,\cdot\,))^{-1}\circ t\,T_{tX}\exp$ vérifie pour tous $s,t\in\mathbb{R}$ l'égalité $\varphi(s+t)=\exp(-t\operatorname{ad}X)\circ\varphi(s)+\varphi(t)$, donc φ est solution de l'équation différentielle linéaire $u'(s)=-\operatorname{ad}X\circ u(s)+\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ et $u(0)=0$ d'inconnue $u\colon\mathbb{R}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

   b) En déduire que la différentielle de exp en X est bijective si et seulement si les valeurs propres de $\operatorname{ad}X$ dans $\mathbb{C}$ sont dans $(\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z})\cup\{0\}$.

3) a) Démontrer que l'application $\exp\colon\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\to GL(n,\mathbb{C})$ est surjective.

   b) Soit $X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Démontrer que la différentielle de exp en X est bijective si et seulement si on a $\lambda-\mu\notin 2i\pi\mathbb{Z}$ pour toutes valeurs propres distinctes λ et μ de X.

4) a) Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. On note : $U_{\mathcal{O}}=\{X\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{C})\mid\forall\lambda$ valeur propre de X $\lambda\in\mathcal{O}\}$.
   Démontrer que $U_{\mathcal{O}}$ est un ouvert de $\mathfrak{M}(n,\mathbb{C})$.
   Indication : étant donné $X_0\in U_{\mathcal{O}}$, on a $X-\lambda I=(X_0-\lambda I)(I+(X_0-\lambda I)^{-1}(X-X_0))$ quand $X\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{C})$ et $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{O}$.

   b) On pose : $A=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid |\operatorname{Im}\lambda|<\pi\}$ et $B=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda\notin\mathbb{R}^-\}$.
   Démontrer que l'application exponentielle se restreint en un difféomorphisme de l'ouvert U_A de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ sur l'ouvert U_B de $GL(n,\mathbb{C})$.
   Indication : on obtiendra l'injectivité de cette restriction en utilisant la décomposition de Jordan $X=X_s+X_n$ d'un $X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

(*) • Soit $X\in\mathfrak{g}$. On définit un champ de vecteurs A_X sur G en posant $A_X(g)=T_{1_G}(g\,\cdot\,)\cdot X$ pour $g\in G$ et $X\in\mathfrak{g}$.
Le flot Φ_X de A_X est l'unique application C^∞ d'un ouvert $\Omega=\bigcup_{x_0\in G}(I_{x_0}\times\{x_0\})$ de $\mathbb{R}\times G$ dans G telle que pour tout $x_0\in G$ l'application $t\in I_{x_0}\mapsto\Phi_X(t,x_0)$ est la plus grande solution de $x'=A_X(x)$ en x_0 à $t=0$.

On pose $\gamma_X=\Phi_X(\cdot,1_G)$. Si $s\in I_{1_G}$, les applications γ_X et $u\colon t\in I_{1_G}+s\mapsto\gamma_X(s)\gamma_X(t-s)$ vérifient $x'=A_X(x)$ et $x(s)=\gamma_X(s)$, donc coïncident sur $I_{1_G}\cap(I_{1_G}+s)$. La possibilité de prolonger γ_X à $I_{1_G}\cup(I_{1_G}+s)$ en lui imposant d'être égal à u dans $I_{1_G}+s$ quand $s\in I_{1_G}$ montre que $I_{1_G}=\mathbb{R}$ puis $\gamma_X(s)\,\gamma_X(t-s)=\gamma_X(t)$ pour $s,t\in\mathbb{R}$.

• On pose : $\exp X=\gamma_X(1)$ pour $X\in\mathfrak{g}$. L'application exp est C^∞ car $(\exp X,X)=\Phi(1,1_G,X)$ où Φ est le flot du champ de vecteurs A sur $G\times\mathfrak{g}$ défini par : $A(g,X)=(T_{1_G}(g\,\cdot\,)\cdot X,0)$ pour $g\in G$ et $X\in\mathfrak{g}$.

Si $X\in\mathfrak{g}$ et $s\in\mathbb{R}$, les applications γ_{sX} et $t\in\mathbb{R}\mapsto\gamma_X(st)$ vérifient $x'=A_{sX}(x)$ et $x(0)=1_G$, donc sont égales. en particulier en $t=1$, ce qui s'écrit $\exp(sX)=\gamma_X(s)$. D'où : $\exp((s+t)X)=\gamma_X(s)\gamma_X((s+t)-s)=\exp(sX)\exp(tX)$ pour $s,t\in\mathbb{R}$ et $X\in\mathfrak{g}$, et $\frac{d}{dt}\big(\exp(tX)\big)\big|_{t=0}=\gamma'_X(0)=A_X(\gamma_X(0)))=X$ pour $X\in\mathfrak{g}$.

Décompositions polaires des groupes classiques

On va considérer dans cette partie un groupe « classique », c'est-à-dire un groupe parmi : $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $GL(n,\mathbb{H}) \subseteq GL(2n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{H}) \subseteq GL(2n,\mathbb{C})$; $O_{\mathbb{R}}(I_{p,q})$, $SO_{\mathbb{R}}(I_{p,q})$; $O_{\mathbb{C}}(I_n)$, $SO_{\mathbb{C}}(I_n)$; $Sp(2n,\mathbb{R}) = O_{\mathbb{R}}(J_n) = SO_{\mathbb{R}}(J_n)$, $Sp(2n,\mathbb{C}) = O_{\mathbb{C}}(J_n) = SO_{\mathbb{C}}(J_n)$; $U_{\mathbb{C}}(I_{p,q})$, $SU_{\mathbb{C}}(I_{p,q})$; $U_{\mathbb{H}}(I_{p,q}) = SU_{\mathbb{H}}(I_{p,q}) \subseteq GL(2(p+q),\mathbb{C})$, $U_{\mathbb{H}}(\mathrm{j}I_n) = SU_{\mathbb{H}}(\mathrm{j}I_n) \subseteq GL(2n,\mathbb{C})$.

On notera également : $S(O(p)\times O(q)) := \{(a,d) \in O(p)\times O(q) \mid (\det a)(\det d) = 1\}$ et $S(U(p)\times U(q)) := \{(a,d) \in U(p)\times U(q) \mid (\det a)(\det d) = 1\}$.

5) On pose :
$H = \{X \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{C}) \mid X \text{ hermitienne}\}$ et $H^+ = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid g \text{ hermitienne définie positive}\}$,
$S = \{X \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}) \mid X \text{ symétrique}\}$ et $S^+ = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid g \text{ symétrique définie positive}\}$.

a) Démontrer que H^+ (resp. S^+) est une sous-variété C^∞ de $GL(n,\mathbb{C})$ (resp. $GL(n,\mathbb{R})$) et que l'application exp se restreint en un difféomorphisme de H sur H^+ (resp. S sur S^+).

b) Soit $g \in GL(n,\mathbb{C})$. Monter qu'il existe un unique $(u,h) \in U(n)\times H^+$ tel que $g = uh$.

c) Démontrer que les applications $\begin{array}{rcl} U(n)\times H & \to & GL(n,\mathbb{C}) \\ (k,X) & \mapsto & k\exp X \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} 0(n)\times S & \to & GL(n,\mathbb{R}) \\ (k,X) & \mapsto & k\exp X \end{array}$ sont des difféomorphismes.

6) Soit $G \subseteq GL(m,\mathbb{C})$ un groupe classique. On pose : $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, $K = U(m)\cap G$ et $\mathscr{P} = H\cap\mathfrak{g}$.

a) Démontrer que l'application $\begin{array}{rcl} K\times\mathscr{P} & \to & G \\ (k,X) & \mapsto & k\exp X \end{array}$ est un difféomorphisme.

b) En déduire que K est un sous-groupe compact maximal de G.

c) Démontrer que K est isomorphe à l'un des groupes suivants : $O(m)$, $SO(m)$, $O(p)\times O(q)$, $S(O(p)\times O(q))$; $U(m)$, $SU(m)$, $U(p)\times U(q)$, $S(U(p)\times U(q))$; $Sp(m)$, $Sp(p)\times Sp(q)$.

Topologie des groupes classiques

7) On admet que la sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ est simplement connexe quand $n \geq 2$.
Démontrer que :
– $SO(n)$ est connexe quand $n \geq 1$;
– $SU(n)$ et $Sp(n)$ sont simplement connexes.
Indication : $SU_{\mathbb{F}}(I_n)$ agit sur la sphère unité S de $\mathbb{F}^n$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$) et le stabilisateur du premier vecteur de la base canonique est isomorphe à $SU_{\mathbb{F}}(I_{n-1})$.

Groupe spinoriel : on admet qu'il existe un morphisme de groupes de Lie $p\colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ revêtement de noyau à 2 éléments, avec $\mathrm{Spin}(n)$ compact et simplement connnexe quand $n \geq 3$.

8) Soit G un groupe classique. On note G^0 la composante connexe de 1 dans G.

a) Déterminer le groupe quotient G/G^0 à isomorphisme près.

b) Déterminer le groupe $\Pi_1(G,1)$ à isomorphisme près.

9) Soit $G \subseteq GL(m,\mathbb{C})$ parmi $SL(n,\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$, $SO(n,\mathbb{C})$ $(n \geq 3)$, et $Sp(2n,\mathbb{C})$ $(n \geq 1)$.
On pose : $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, $K = U(m)\cap G$, $\mathfrak{k} = \operatorname{Lie} K$, et note $\widetilde{K}$ le revêtement universel de K.
On se donne un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie V et sa représentation $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

a) Démontrer que $\mathfrak{k}$ engendre le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ et que $\widetilde{K}$ est compact.

b) Construire un morphisme de groupes de Lie $\rho\colon \widetilde{K} \to GL(V)$ tel que $\operatorname{Lie}\rho = \pi_{|\mathfrak{k}}$.

c) On admet qu'il existe une mesure positive finie $\mu \neq 0$ sur $\widetilde{K}$ avec $(\cdot k)(\mu) = \mu$ pour $k \in \widetilde{K}$.
Soit φ un produit scalaire sur V. On pose : $\langle v,w\rangle = \int_{\widetilde{K}} \varphi(xv,xw)\,\mathrm{d}\mu(x)$ pour $v,w \in V$.
Soit W un sous-$\mathfrak{g}$-module de V. Construire un sous-$\mathfrak{g}$-module W' de V tel que $V = W \oplus W'$.
(Il s'agit de la démonstration du théorème de Weyl pour $\mathfrak{g}$ par le « unitarian trick ».)