

V. SYSTÈMES DE RACINES

Algèbres de Lie classiques compactes

On s'intéresse ici à : $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$, et $\mathfrak{sp}(n)$.

- 1) Soit K un groupe de Lie réel compact. On note \mathfrak{k} l'algèbre de Lie de K .
 - a) Démontrer qu'il existe un produit scalaire K -invariant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathfrak{k} .
 - b) Démontrer que \mathfrak{k} est une algèbre de Lie réductive.
 - c) Démontrer que l'application $\mathfrak{t} \mapsto \exp \mathfrak{t}$ est une bijection de l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{k} sur l'ensemble des tores maximaux de K .

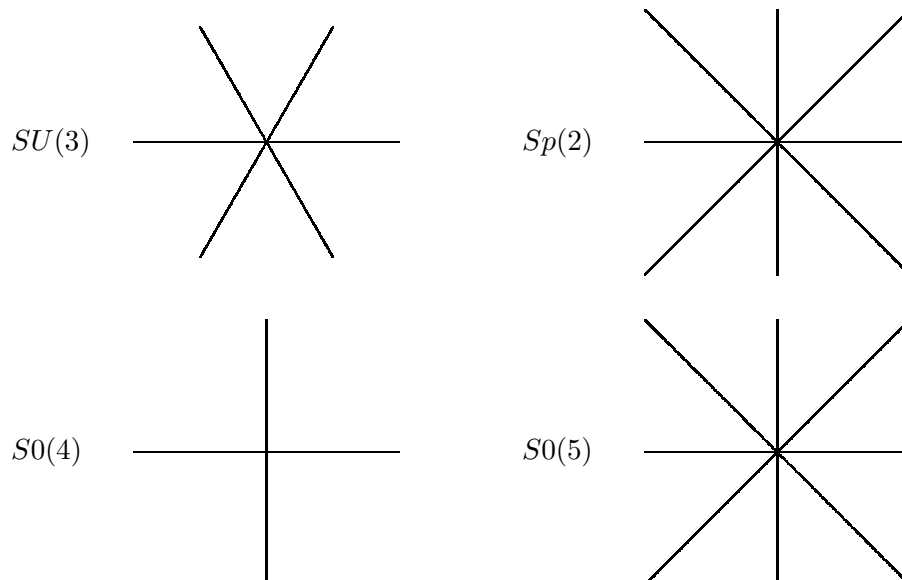
2) On note : $T_n := \left\{ t_{\theta_1, \dots, \theta_n} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} ; \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R} \right\} \subseteq U(n) \subseteq Sp(n)$, et,

$$[T_n]_{\mathbb{R}} := \left\{ [t_{\theta_1, \dots, \theta_n}]_{\mathbb{R}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos \theta_1 & & & -\sin \theta_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \cos \theta_n & & & -\sin \theta_n \\ \hline \sin \theta_1 & & & \cos \theta_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \sin \theta_n & & & \cos \theta_n \end{array} \right) ; \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R} \right\} \subseteq SO(2n) \subseteq SO(2n+1)$$

où on injecte $SO(2n)$ dans $SO(2n+1)$ par $A \in SO(2n) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in SO(2n+1)$.

Pour traiter cet exercice, on utilisera la diagonalisation de certains $\text{ad } H$ (feuille jointe).

- a) Démontrer que T_n est un tore maximal de $U(n)$ et de $Sp(n)$.
 - b) Démontrer que $T_n \cap SU(n)$ est un tore maximal de $SU(n)$.
 - c) Démontrer que $[T_n]_{\mathbb{R}}$ est un tore maximal de $SO(2n)$ et de $SO(2n+1)$.
- 3) On choisit successivement le groupe compact K égal à : $SU(3)$, $Sp(2)$, $SO(4)$, $SO(5)$.
On utilise le tore T donné dans l'exercice précédent. On pose : $\mathfrak{k} = \text{Lie } K$ et $\mathfrak{t} = \text{Lie } T$.
Dans cet exercice, il s'agit de compléter les dessins situés ci-dessous.
- a) Exhiber une base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ de $R := R(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ puis dessiner \check{R} .
 - b) Tracer certaines droites $\{X \in \mathfrak{it} \mid \alpha(X) = k\}$ de direction $(\mathbb{R}H_{\alpha})^{\perp}$ avec $\alpha \in R$ et $k \in \mathbb{Z}$.
 - c) Hachurer l'alcôve A de la chambre \check{C} associée à $\{H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}\}$ à laquelle O est adhérent.
 - d) Placer à l'aide de petits ronds les points de $\text{Ker } \exp_T(2i\pi \cdot)$.
 - e) En déduire les groupes $\Pi_1(K, 1)$ et $Z(K)$.



Algèbres de Lie classiques non-compactes

On va considérer dans cette partie une algèbre de Lie « classique », c'est-à-dire parmi : $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$ et $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$; $\mathfrak{o}(p, q) = \mathfrak{so}(p, q)$; $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$; $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$; $\mathfrak{u}(p, q)$ et $\mathfrak{su}(p, q)$; $\mathfrak{sp}(p, q)$ et $\mathfrak{u}_{\mathbb{H}}(\mathfrak{j}I_n)$.

4) On appelle *forme réelle* d'une algèbre de Lie complexe $\tilde{\mathfrak{g}}$ toute sous-algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} de $\tilde{\mathfrak{g}}$ telle que tout élément de $\tilde{\mathfrak{g}}$ s'écrit de manière unique $X + iY$ avec $X, Y \in \mathfrak{g}$.

a) Démontrer que : $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ sont respectivement des formes réelles de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$.

Indication : poser $\sigma(x) = \bar{x}$ pour $x \in GL(n, \mathbb{C})$ et chercher les points fixes de σ .

b) Démontrer que : $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$, $\mathfrak{u}_{\mathbb{H}}(\mathfrak{j}I_n)$ sont respectivement des formes réelles de $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$.

Indication : poser $\sigma(x) = \text{int } J_n(\bar{x})$ pour $x \in GL(2n, \mathbb{C})$ et chercher les points fixes de σ .

c) On pose : $n = p + q$, $\alpha = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & iI_q \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & I_q & & \\ & & I_p & \\ & & & -I_q \end{pmatrix}$.

Démontrer que : $\text{Ad } \alpha \cdot \mathfrak{so}(p, q)$, $\mathfrak{u}(p, q)$, $\mathfrak{su}(p, q)$, $\text{Ad } \beta \cdot \mathfrak{sp}(p, q)$ sont respectivement des formes réelles de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$.

Indication : poser $\sigma(x) = \begin{cases} \text{int } I_{p,q}(\bar{x}) & \text{pour } x \in GL(n, \mathbb{C}) \\ \text{int } [I_{p,q}]_{\mathbb{C}}(\bar{x}) & \text{pour } x \in GL(2n, \mathbb{C}) \end{cases}$ et chercher les points fixes de σ .

5) a) Démontrer que : le centralisateur de $O(n)$ dans $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ est $\mathbb{R}I_n$, le centralisateur de $U(n)$ dans $\mathfrak{M}(n, \mathbb{C})$ est $\mathbb{C}I_n$, et le centralisateur de $Sp(n)$ dans $\mathfrak{M}(n, \mathbb{H})$ est $\mathbb{R}I_n$.

b) Démontrer que : le centralisateur de $SO(n)$ dans $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ est $\mathbb{R}I_n$, et le centralisateur de $SU(n)$ dans $\mathfrak{M}(n, \mathbb{C})$ est $\mathbb{C}I_n$.

c) Déterminer les centres des groupes de Lie classiques et de leurs algèbres de Lie.

6) a) Démontrer qu'une algèbre de Lie complexe de dimension finie $\tilde{\mathfrak{g}}$ est semi-simple (resp. réductive) si et seulement si $\tilde{\mathfrak{g}}|_{\mathbb{R}}$ est semi-simple (resp. réductive).

b) Démontrer qu'une algèbre de Lie réelle de dimension finie \mathfrak{g} est semi-simple (resp. réductive) si et seulement si $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est semi-simple (resp. réductive).

c) Démontrer qu'une algèbre de Lie réelle de dimension finie \mathfrak{g} est simple si et seulement si : $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est simple ou \mathfrak{g} est isomorphe à une algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}|_{\mathbb{R}}$ avec $\tilde{\mathfrak{g}}$ complexe simple.

d) Démontrer que les algèbres de Lie classiques sont réductives comme algèbres de Lie réelles.

7) a) Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie réductive.

Construire une bijection $\tilde{\mathfrak{h}} \in \text{Car } \tilde{\mathfrak{g}} \mapsto \tilde{\mathfrak{h}}|_{\mathbb{R}} \in \text{Car}(\tilde{\mathfrak{g}}|_{\mathbb{R}})$.

b) Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle de dimension finie réductive.

Construire une bijection $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ de $\text{Car } \mathfrak{g}$ sur l'ensemble des éléments de $\text{Car}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ qui sont stables par conjugaison.

8) On pose : $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & -iI_n \\ 0 & I_n & iI_n \end{pmatrix}$ et $\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ I_n & iI_n \end{pmatrix}$ et $\Psi = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Soit \mathfrak{g} parmi $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, $\text{Ad } U \cdot \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(\Phi)$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, $\text{Ad } V \cdot \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(\Psi)$.

Dans chacun de ces cas : exhiber une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , puis décrire le système de racines $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, son diagramme de Dynkin et son groupe de Weyl $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Utilisation d'un diagramme de Satake

9) Décrire la décomposition $\mathfrak{h}_d = \mathfrak{t}_d \oplus \mathfrak{a}_d$ de « la » sous-algèbre de Cartan maximale déployée \mathfrak{h}_d de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 5)$ et déterminer les racines réelles de $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, (\mathfrak{h}_d)_{\mathbb{C}})$.