VI. Algèbre enveloppante

1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   a) Montrer que $\dim(U(\mathfrak{g})\cdot u)<+\infty$ si $u\in U(\mathfrak{g})$, où $U(\mathfrak{g})\overset{\text{alg.}}{\underset{\text{ass.}}{\to}}\mathfrak{gl}(U(\mathfrak{g}))$ prolonge $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g}\overset{\text{alg.}}{\underset{\text{Lie}}{\to}}\mathfrak{gl}(U(\mathfrak{g}))$.
   b) Soient $u,v\in U(\mathfrak{g})$ tels que $uv=0$. Démontrer que $u=0$ ou $v=0$
   c) On munit $U(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{K}}U(\mathfrak{g})$ d'une structure d'algèbre par : $(u\otimes v)(u'\otimes v')=(uu')\otimes(vv')$.
   Démontrer qu'il existe un morphisme d'algèbres unifère $\Delta\colon U(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{K}}U(\mathfrak{g})$ unique tel que $\Delta X=X\otimes 1+1\otimes X$ pour $X\in\mathfrak{g}$, puis que $\mathfrak{g}=\{u\in U(\mathfrak{g})\mid \Delta u=u\otimes 1+1\otimes u\}$.
   Indication : remarquer que $\mathrm{sym}(S^n(\mathfrak{g}))=\mathrm{Ker}(m\circ\Delta-2^n\mathrm{id})$ où m est le produit de $U(\mathfrak{g})$.

2) a) On note $\mathfrak{n}_0:=L(X_1,X_2,X_3)/\mathfrak{i}$, où $\mathfrak{i}$ est l'idéal engendré par $\{[U,[V,W]]\}_{U,V,W\in L(X_1,X_2,X_3)}$.
   Démontrer que : $\dim\mathfrak{n}_0=6$.
   b) Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie de dimension 3 telle que $[\mathfrak{n},[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]]=\{0\}$.
   Démontrer que $\mathfrak{n}$ est isomorphe à un quotient de $\mathfrak{n}_0$.

Algèbre enveloppante de l'algèbre de Heisenberg

On note : $$\mathfrak{h}=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}0 & x_1 & \cdots & x_n & t\\ & & & & y_1\\ & & \ddots & & \vdots\\ & 0 & & & y_n\\ & & & & 0\end{pmatrix}}_{\text{noté } x_1P_1+\cdots+x_nP_n+y_1Q_1+\cdots+y_nQ_n+tE}\ ;\ x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,t\in\mathbb{R}\right\}$$ « algèbre de Heisenberg ».

Ainsi $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n+2,\mathbb{R})$ dont la loi est déterminée par :
$$[P_i,P_j]=[Q_i,Q_j]=0 \ \text{ et } \ [P_i,Q_j]=\delta_{i,j}E \ \text{ quand } 1\le i,j\le n, \ \text{ avec } \ E\in\mathrm{Z}(\mathfrak{h}).$$
On pose : $V=\mathrm{Vect}(P_1,\dots,P_n,Q_1,\dots,Q_n)$.
On munit $V_{\mathbb{C}}$ de la forme bilinéaire anti-symétrique B définie par :
$$B\Big(\sum_{i=1}^n(x_iP_i+y_iQ_i),\sum_{i=1}^n(x'_iP_i+y'_iQ_i)\Big)=\sum_{i=1}^n(x_iy'_i-x'_iy_i)\ \text{ pour } \ \big((x_i,y_i,x'_i,y'_i)\big)_{1\le i\le n}\in(\mathbb{C}^4)^n.$$
Par conséquent : $B(P_i,P_j)=B(Q_i,Q_j)=0$ et $B(P_i,Q_j)=\delta_{i,j}$ quand $1\le i,j\le n$.

3) Déterminer le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$.

4) On note $\mathscr{I}_U$ l'idéal bilatère de $T(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ engendré par $\{X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y]\ ;\ X,Y\in\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\}$, $\mathscr{I}_W$ l'idéal bilatère de $T(V_{\mathbb{C}})$ engendré par $\{u\otimes v-v\otimes u-B(u,v)\,1\ ;\ u,v\in V_{\mathbb{C}}\}$, et $\langle E-1\rangle_U$ (resp. $\langle E-1\rangle_T$) l'idéal bilatère de $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ (resp. $T(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$) engendré par $E-1$.
   On pose $\mathscr{W}:=T(V_{\mathbb{C}})/\mathscr{I}_W$ « algèbre de Weyl de V ».
   a) Vérifier que l'application canonique de $T(V_{\mathbb{C}})$ dans $T(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})/\langle E-1\rangle_T$ est bijective.
   On note f l'application composée de morphismes canoniques
   $$T(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\to T(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})/\langle E-1\rangle_T\xleftarrow{\sim}T(V_{\mathbb{C}})\to\mathscr{W}.$$
   Démontrer que $\mathrm{Ker}\,f$ est l'idéal bilatère de $T(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ engendré par $E-1$ et $\mathscr{I}_W$.
   b) Vérifier qu'on définit une représentation ι de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathscr{W}$ en posant :
   $$\iota(v+tE)=\overset{\frown}{v+t1}\ \text{ pour } v\in V_C \text{ et } t\in\mathbb{C}.$$
   On note $\widetilde{\iota}$ la représentation de $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ dans $\mathscr{W}$ qui prolonge ι.
   Démontrer que $\widetilde{\iota}(u)=f(a)$ lorsque $a\in T(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ se projette sur $u\in U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})=T(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})/\mathscr{I}_U$.
   Indication : $\mathrm{Ker}\,f$ est aussi l'idéal bilatère de $T(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ engendré par $E-1$ et $\mathscr{I}_U$.
   c) On se donne une base $(v_1,\dots,v_{2n})$ de $V_{\mathbb{C}}$.
   Démontrer que $(\dot{v}_1^{k_1}\dots\dot{v}_{2n}^{k_{2n}})_{k_1,\dots,k_{2n}\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathscr{W}$.
   d) On note $\mathscr{S}=\{x\in\mathbb{R}^n\mapsto A(x)\mathrm{e}^{-\pi\|x\|^2}\ ;\ A\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]\}$, où $\|\ \|$ est la norme euclidienne.
   Vérifier qu'il existe une unique représentation π de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathscr{S}$ telle que :
   $$\pi(E)=\mathrm{id}_{\mathscr{S}},\ \ \pi(P_i)=\tfrac{\partial}{\partial x_i}\ \text{ et } \ \pi(Q_i)=(x_i\,\cdot)\ \text{ quand } 1\le i\le n.$$
   Démontrer que la représentation $\widetilde{\pi}$ de $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ associée est irréductible de noyau $\langle E-1\rangle_U$.
   Indication : remarquer que $\pi(P_i+2\pi Q_i)\big(A(x)\,\mathrm{e}^{-\pi\|x\|^2}\big)=\frac{\partial A(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{e}^{-\pi\|x\|^2}$.

Algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$

On pose $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ et choisit $\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} ;\ \lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{C} \text{ et } \lambda_1+...+\lambda_n=0\right\}\in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$.

On sait que la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ s'écrit $\kappa_{\mathfrak{g}}=2nB$ où $B(X,Y):=\mathrm{tr}(XY)$ pour $X,Y\in\mathfrak{g}$.

L'élément de Casimir associé à la forme bilinéaire $\mathfrak{g}$-invariante non-dégénérée B sur $\mathfrak{g}$ vaut :

$$C_B=\sum_{i=1}^{N} X_i\widetilde{X}_i \ \in\ \mathrm{Z}(U(\mathfrak{g}))$$

pour toute base $(X_i)_{1\le i\le N}$ de $\mathfrak{g}$, à laquelle on associe la base $(\widetilde{X}_i)_{1\le i\le N}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $B(X_i,\widetilde{X}_j)=\delta_{i,j}$.

On a : $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\lambda_i-\lambda_j\ ;\ 1\le i,j\le n \text{ et } i\ne j\}$. On prend la base $B:=\{\underbrace{\lambda_1-\lambda_2}_{\alpha_1},...,\underbrace{\lambda_{n-1}-\lambda_n}_{\alpha_{n-1}}\}$.

On a aussi : $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\lambda_{\sigma^{-1}(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{\sigma^{-1}(n)}\end{pmatrix} ;\ \sigma\in\mathfrak{S}_n\right\}$.

De plus : $[X_{\lambda_i-\lambda_j},X_{\lambda_j-\lambda_i}]=H_{\lambda_i-\lambda_j}=E_{i,i}-E_{j,j}$ avec $X_{\lambda_i-\lambda_j}:=E_{i,j}\in\mathfrak{g}^{\lambda_i-\lambda_j}$ pour $i\ne j$, où $E_{i,j}\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{C})$ a pour coefficients 1 à l'intersection de la i^{e} ligne et j^{e} colonne, et 0 ailleurs.

5) Ici : $n=2$, donc $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. On note : $E=\overbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}^{\text{souvent noté } X}$, $H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $F=\overbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}^{\text{souvent noté } Y}$, $\mathfrak{h}=\mathbb{C}H$.

a) Déterminer les éléments de $U_{(2)}(\mathfrak{g})$ qui sont dans le centre de $U(\mathfrak{g})$.
Indication : l'action adjointe de H sur $F^qH^mE^p$ donne un multiple de $F^qH^mE^p$.

b) En déduire les éléments de $S_{(2)}(\mathfrak{g}):=\bigoplus_{0\le k\le 2} S^k(\mathfrak{g})$ qui sont annulés sous l'action de $\mathfrak{g}$.

c) On pose : $\Omega=C_B=\frac{1}{2}H^2+EF+FE\ \in\ \mathrm{Z}(U(\mathfrak{g}))$ et $W=\{-\mathrm{id},\mathrm{id}\}$.
Quelle est l'image de Ω dans $S(\mathfrak{h})^W$ par l'isomorphisme $\mu_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ d'Harish-Chandra ?

d) Quelle est l'image de Ω dans $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ par la réciproque $\lambda_{\mathfrak{g}}$ de l'isomorphisme de Duflo ?

6) Ici : $n=3$, donc $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.
On souhaiterait déterminer des éléments de degré 2 et 3 de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, et leur image dans $\mathrm{Z}(U(\mathfrak{g}))$.

a) Que vaut $C_B\in\mathrm{Z}(U(\mathfrak{g}))$?
Calculer l'image $\mu_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(C_B)$ de C_B dans $S(\mathfrak{h})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$.

b) On pose : $P:=(H_{\lambda_1-\lambda_2}+H_{\lambda_1-\lambda_3})(H_{\lambda_2-\lambda_3}+H_{\lambda_2-\lambda_1})(H_{\lambda_3-\lambda_1}+H_{\lambda_3-\lambda_2})\in S(\mathfrak{h})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$.
Calculer l'image $\widetilde{P}=\mathrm{res}_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{-1}(P)$ de P dans $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.
Indication : relier $\widetilde{P}$ à l'élément $\widetilde{P}_0$ de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tel que $\widetilde{P}_0(\lambda)=\det X$ quand $\lambda=B(X,\cdot)$.

7) On se place dans le cas général : $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ avec $n\ge 2$.

a) On note : $\det(T\,\mathrm{id}-X)=T^n+p_2(X)T^{n-2}-p_3(X)T^{n-3}+...+(-1)^n p_n(X)$ pour $X\in\mathfrak{g}$.
Démontrer que p_2, ..., p_n appartiennent à $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (on identifie $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$ à l'aide de B).

b) Démontrer que p_2, ..., p_n sont des générateurs algébriquement indépendants de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.
Indication : utiliser le théorème de restriction de Chevalley.