VII. Modules simples d'une algèbre de Lie semi-simple

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie semi-simple.
On fixe $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$. On pose $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On se donne une base B de R, et note $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in R^+} \alpha$.

Modules de plus haut poids

1) a) Dessiner dans les cas de A_2 et B_2 : la base, les racines positives, les éléments positifs, les poids fondamentaux, la chambre positive, les poids dominants.
On constate sur les dessins de A_2 et B_2 que les poids dominants sont ici positifs.

b) Démontrer que tout poids de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ qui est dominant pour B est positif, mais que certains poids positifs ne sont pas dominants (d'ou la notation P_{++} utilisée par Bourbaki).
Indication : quand $\lambda_0, ..., \lambda_l \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ vérifient $x_0\lambda_0 + ... + x_k\lambda_k = x_{k+1}\lambda_{k+1} + ... + x_l\lambda_l$ avec $x_0, ..., x_l \in \mathbb{R}^+$ et $\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle \leq 0$ pour $i \neq j$, on a $x_0\lambda_0 + ... + x_k\lambda_k = x_{k+1}\lambda_{k+1} + ... + x_l\lambda_l = 0$.

c) On note C la chambre de Weyl associée à B et $P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in R \quad \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}\}$.
Démontrer que $\mu + \rho$ décrit $P \cap C$ lorsque μ décrit P_+.

2) a) Soient V un $\mathfrak{g}$-module qui a un poids maximal $\mu \in \mathfrak{h}^*$ et $v \in V_\mu \setminus \{0\}$.
Démontrer que v est un vecteur primitif de poids μ.

b) Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie engendré par un vecteur primitif.
Démontrer que V est un $\mathfrak{g}$-module simple.

3) a) Démontrer que la représentation canonique de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et les représentations adjointes de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$, sont des représentations irréductibles, et calculer leur plus haut poids.

b) Déterminer, à isomorphisme près, les décompositions en composantes irréductible des représentations canoniques de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ et dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

4) Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie engendré par un vecteur primitif de poids μ.
a) Démontrer que les poids de $\mathfrak{h}$ dans V^* sont les opposés de ceux de $\mathfrak{h}$ dans V.

b) On suppose que V est simple, et note μ son plus grand poids. Démontrer que V^* est simple de plus grand poids $-w_0(\mu)$, où w_0 est l'unique élément de $W(R)$ tel que $w_0(B) = -B$.

5) Soient V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie et μ son plus haut poids.
On pose $B = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$. On note ϖ_1, ..., ϖ_l les poids fondamentaux associés à α_1,...,α_l.
On peut donc écrire : $\mu = m_1\varpi_1 + \cdots + m_l\varpi_l$ avec $m_1, ..., m_l \in \mathbb{N}$.
On fixe pour chaque $i \in \{1, ..., l\}$ un $\mathfrak{g}$-module simple V_i de plus haut poids ϖ_i .
Démontrer que le $\mathfrak{g}$-module $\bigotimes\limits_{1 \leq i \leq l} \left(\otimes^{m_i} V_i\right)$ contient un unique sous-module isomorphe à V.

Action du centre de l'algèbre enveloppante

6) Soient $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. On suppose que le module de Verma $M(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\mu-\rho}$ est isomorphe à un sous-module du module de Verma $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}$.
Démontrer que : $\mu \in W(R) \cdot \lambda$ et $\mu \in \lambda - \mathbb{N}B$.(*)

7) On pose : $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et $\Omega = \frac{1}{2}H^2 + EF + FE \in \mathrm{Z}(U(\mathfrak{g}))$.
a) Quelle est l'action de Ω sur le $\mathfrak{g}$-module simple $S^m(\mathbb{C}^2)$ de dimension $m+1$ ($m \in \mathbb{N}$) ?

b) Retrouver cette action en calculant $\chi_\lambda(\Omega)$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

(*) Réciproquement, Verma a obtenu : si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\alpha \in R^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ vérifient $\mu := s_\alpha(\lambda) \in \lambda - \mathbb{N}B$, alors $M(\mu) \hookrightarrow M(\lambda)$.

Représentations fondamentales de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $n \geq 2$

On pose $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(n)$ et $\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} ; \ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathrm{i}\mathbb{R} \text{ et } \lambda_1 + ... + \lambda_n = 0 \right\} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{k})$.

On a l'isomorphisme d'algèbres de Lie canonique $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ puis $\mathfrak{h} := \mathfrak{t} + \mathrm{i}\mathfrak{t} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$.

On a : $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\lambda_i - \lambda_j \,;\ 1 \leq i,j \leq n \text{ et } i \neq j\}$. On choisit la base $B := \{\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2}_{\alpha_1}, ..., \underbrace{\lambda_{n-1} - \lambda_n}_{\alpha_{n-1}}\}$.

Poids fondamentaux : $\varpi_{\alpha_i} = \lambda_1 + ... + \lambda_i$ pour $i \in \{1, ..., n-1\}^{(**)}$.

8) a) Démontrer que l'action de $\mathfrak{g}$ dans $\Lambda^r(\mathbb{C}^n)$ a pour plus haut poids $\lambda_1 + ... + \lambda_r$ $(0 < r < n)$.

b) En déduire que le module simple de plus haut poids ϖ_{α_r}, $1 \leq r \leq n-1$, est $\Lambda^r(\mathbb{C}^n)$.
Indication : le groupe $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ s'identifie à $\mathfrak{S}_n$ opérant par permutation des λ_i.

9) Soit $N \in \mathbb{N}$. On note V_N le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ formé des applications polynomiales homogènes de degré N : $V_N = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(z_1^{p_1} ... z_n^{p_n} \overline{z}_1^{q_1} ..., \overline{z}_n^{q_n})_{p_1 + ... + p_n + q_1 + ... + q_n = N}$.
Le groupe $SU(n)$ agit sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ par $(g \cdot f)(v) := f(g^{-1}v)$ en laissant V_N invariant.
On obtient une structure de $\mathfrak{su}(n)$-module sur V_N par $(X \cdot P)(v) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(\exp(-tX)v)_{|t=0}$.

a) On munit V_N de sa structure de $\mathfrak{g}$-module qui prolonge sa structure de $\mathfrak{su}(n)$-module.
Décomposer V_N en sous-espaces poids sous l'action de $\mathfrak{h}$.

b) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q = N$.
On pose : $V_{p,q} := \mathrm{Vect}(z_1^{p_1} ... z_n^{p_n} \overline{z}_1^{q_1} ..., \overline{z}_n^{q_n})_{p_1 + ... + p_n = p \text{ et } q_1 + ... + q_n = q}$.
Déduire du (a) que le sous-module $V_{p,q}$ de V_N a pour plus grand poids $q\lambda_1 - p\lambda_n$.

Représentations fondamentales de $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ et $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$, $n \geq 2$

On pose $\mathfrak{k}_D = \mathfrak{so}(2n)$ et $\mathfrak{t} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & \mathrm{i}\lambda_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & \mathrm{i}\lambda_n \\ \hline -\mathrm{i}\lambda_1 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & -\mathrm{i}\lambda_n & & & 0 \end{array} \right) ; \ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathrm{i}\mathbb{R} \right\} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{k}_D)$.

On a l'isomorphisme d'algèbres de Lie canonique $\mathfrak{k}_{D\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_D := \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ puis $\mathfrak{h} := \mathfrak{t} + \mathrm{i}\mathfrak{t} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g}_D)$.

On a : $R(\mathfrak{g}_D,\mathfrak{h}) = \{\pm\lambda_i \pm \lambda_j \,; 1 \leq i < j \leq n\}$. On prend : $B_D := \{\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2}_{\alpha_1}, ..., \underbrace{\lambda_{n-1} - \lambda_n}_{\alpha_{n-1}}, \underbrace{\lambda_{n-1} + \lambda_n}_{\alpha_{n,D}}\}$.

Poids fondamentaux : $\varpi_{\alpha_i,D} = \lambda_1 + ... + \lambda_i$ quand $1 \leq i \leq n-2$,
$\varpi_{\alpha_{n-1},D} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}) - \frac{1}{2}\lambda_n$ et $\varpi_{\alpha_{n,D}} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}) + \frac{1}{2}\lambda_n$.

On injecte $\mathfrak{k}_D = \mathfrak{so}(2n)$ dans $\mathfrak{k}_B := \mathfrak{so}(2n+1)$ par $A \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$, ce qui donne $\mathfrak{t} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{k}_B)$.

On a l'isomorphisme d'algèbres de Lie canonique $\mathfrak{k}_{B\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_B := \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ puis $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g}_B)$.

On a : $R(\mathfrak{g}_B,\mathfrak{h}) = R(\mathfrak{g}_D,\mathfrak{h}) \cup \{\pm\lambda_i \,; 1 \leq i \leq n\}$. On prend : $B_B := \{\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2}_{\alpha_1}, ..., \underbrace{\lambda_{n-1} - \lambda_n}_{\alpha_{n-1}}, \underbrace{\lambda_n}_{\alpha_{n,B}}\}$.

Poids fondamentaux : $\varpi_{\alpha_i,B} = \lambda_1 + ... + \lambda_i$ quand $1 \leq i \leq n-1$ et $\varpi_{\alpha_{n,B}} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$.

10) On se donne $r \in \{1, ..., n\}$.

a) Démontrer que l'action de $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ dans $\Lambda^r(\mathbb{C}^{2n+1})$ a pour plus haut poids $\lambda_1 + ... + \lambda_r$.

b) On suppose ici que $r \neq n$.
Démontrer que l'action de $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ dans $\Lambda^r(\mathbb{C}^{2n})$ a pour plus haut poids $\lambda_1 + ... + \lambda_r$.

c) On étudie maintenant le cas $r = n$.
Démontrer que le $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$-module $\Lambda^n(\mathbb{C}^{2n})$ n'est pas simple.
Indication : $\Lambda^n(\mathbb{C}^{2n})_{2\varpi_{\alpha_{n-1},D}}$ et $\Lambda^n(\mathbb{C}^{2n})_{2\varpi_{\alpha_{n,D}}}$ engendrent des sous-modules distincts.

11) Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $V_{\mathbb{R}^m,N}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ formé des applications polynomiales homogènes de degré N : $V_{\mathbb{R}^m,N} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x_1^{p_1} ... x_m^{p_m})_{p_1 + ... + p_m = N}$.
Il a une structure canonique de $SO(m)$-module, puis par dérivation de $\mathfrak{so}(m)$-module.
Démontrer que le $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$-module $V_{\mathbb{R}^m,N}$ a pour plus grand poids $N\lambda_1$.

$(**)$ On confond ici $\lambda = x_1\lambda_1 + ... + x_n\lambda_n \in (\mathbb{C}^n)^*$ avec $\lambda_{|\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}$ identifié à la projection orthogonale de λ sur $(\lambda_1 + ... + \lambda_n)^\perp$.