VIII. Formules du caractère et de la dimension

Formule du caractère

1) a) Calculer directement le caractère $\operatorname{tr}\rho_{N,0}$ de la représentation $\rho_{N,0}$ de $SU(2)$ dans l'espace $H_{N,0}$ de l'exercice 6**c** des applications polynomiales homogènes de degré N en z_1 et z_2.

b) Retrouver ce résultat à l'aide de la formule du caractère.

2) On note $\rho_{p,q}$ la représentation de $SU(3)$ dans l'espace $H_{p,q}$ de l'exercice 6**c**.

a) Démontrer que l'application $(p,q)\in\mathbb{N}^2\mapsto\dot{\widehat{\rho_{p,q}}}\in\widehat{SU(3)}$ est bijective.

b) Démontrer que les représentations fondamentales de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ sont les représentations canoniques de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^3$ et $(\mathbb{C}^3)^*$.

c) Calculer le caractère $\operatorname{tr}\rho_{p,q}$ de $\rho_{p,q}$.

Formule de la dimension

3) On considère une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ de dimension finie qui est semi-simple et $n\in\mathbb{N}$.

a) Démontrer qu'il y a un nombre fini de classes d'isomorphismes de $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension n.

b) On note $p:=\frac{1}{2}\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, où $\mathfrak{h}\in\operatorname{Car}\mathfrak{g}$. Construire un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension n^p.

4) Interpréter la formule du dénominateur de Weyl pour $SU(n)$ (égalité donnée par la formule du caractère pour la représentation triviale) en terme de déterminant de Vandermonde.

Représentations fondamentales de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ (suite)

5) Soit $r\in\{0,...,n\}$. On sait que le $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$-module $\Lambda^r(\mathbb{C}^n)$ a pour plus haut poids $\lambda_1+...+\lambda_r$. Redémontrer à l'aide de la formule de la dimension que $\Lambda^r(\mathbb{C}^n)$ est un $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$-module simple. Ici : $R^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\lambda_i-\lambda_j\}_{1\le i<j\le n}$ donc $\rho=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\varpi_{\lambda_k-\lambda_{k+1}}=\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k)\lambda_k$.

6) On pose : $V_{p,q}=\operatorname{Vect}(z_1^{p_1}...z_n^{p_n}\overline{z}_1^{q_1}...,\overline{z}_n^{q_n})_{p_1+...+p_n=p\text{ et }q_1+...+q_n=q}$ où $p,q,N\in\mathbb{N}$ et $p+q=N$. On sait que le $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$-module $V_{p,q}$ a pour plus grand poids $q\lambda_1-p\lambda_n$.

a) On note : $\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n}\big(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\big)=\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\big(\frac{\partial}{\partial z_k}+\frac{\partial}{\partial\overline{z}_k}\big)^2+\big(\mathrm{i}\,(\frac{\partial}{\partial z_k}-\frac{\partial}{\partial\overline{z}_k})\big)^2\Big)=4\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\overline{z}_k}$.
Démontrer à l'aide de la question 9**b** que : $\Delta V_{p,q}=V_{p-1,q-1}$.

b) En déduire la dimension de $H_{p,q}:=\{P\in V_{p,q}\mid\Delta P=0\}$.

c) Démontrer que $H_{p,q}$ est un $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$-module simple de plus haut poids $q\lambda_1-p\lambda_n$.
Indication : d'après 9**b**, Δ est un morphisme de $SU(n)$-modules.

Représentations fondamentales de $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$ (suite)

7) On se donne $r\in\{1,...,n\}$. On traite cet exercice avec des calculs de dimension pénibles.

a) Démontrer que $\Lambda^r(\mathbb{C}^{2n+1})$ est un $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$-module simple.
Ici : $R^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\lambda_i-\lambda_j\}_{1\le i<j\le n}\cup\{\lambda_i+\lambda_j\}_{1\le i<j\le n}\cup\{\lambda_i\}_{1\le i\le n}$ donc $\rho=\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k+\frac{1}{2})\lambda_k$.

b) On suppose que $r\neq n$. Démontrer que $\Lambda^r(\mathbb{C}^{2n})$ est un $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$-module simple.
Ici : $R^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\lambda_i-\lambda_j\}_{1\le i<j\le n}\cup\{\lambda_i+\lambda_j\}_{1\le i<j\le n}$ donc $\rho=\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k)\lambda_k$.

c) On a vu que le $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$-module $\Lambda^n(\mathbb{C}^{2n})$ a des sous-modules simples $\Lambda^n_-(\mathbb{C}^{2n})$ et $\Lambda^n_+(\mathbb{C}^{2n})$ de plus haut poids $2\varpi_{\alpha_{n-1},D}=\lambda_1+...+\lambda_{n-1}-\lambda_n$ et $2\varpi_{\alpha_n,D}=\lambda_1+...+\lambda_{n-1}+\lambda_n$.
Démontrer que : $\Lambda^n(\mathbb{C}^{2n})=\Lambda^n_-(\mathbb{C}^{2n})\oplus\Lambda^n_+(\mathbb{C}^{2n})$.

8) Soient $m, r \in \mathbb{N}$ tels que $r < \frac{m}{2}$. On reprend l'exercice précédent en limitant les calculs.

a) Soit V un sous-$SO(m)$-module non-nul de $\Lambda^r(\mathbb{C}^m)$. Démontrer que $V = \Lambda^r(\mathbb{C}^m)$.

Indication : fixer $v = \sum\limits_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq m} a_{i_1,\ldots,i_r} e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_r} \in V\backslash\{0\}$ avec le nombre s de $(i_1, \ldots, i_r)$ tels que $a_{i_1,\ldots,i_r} \neq 0$ minimal, et montrer par l'absurde que $s = 1$ en considérant dans le cas contraire un certain $w = v + gv$ avec $g \in SO(m)$ bien choisi.

b) On suppose ici m pair de la forme $2n$ et $r = n$. On note $\sigma \in O(2n)$ la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^{2n}$ parallèlement à $\mathbb{R}e_{2n}$, où e_{2n} est le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.

Démontrer que : $\Lambda^n(\mathbb{C}^{2n}) = \Lambda^n_-(\mathbb{C}^{2n}) \oplus \Lambda^n_+(\mathbb{C}^{2n})$ avec $\Lambda^n_-(\mathbb{C}^{2n}) = \sigma(\Lambda^n_+(\mathbb{C}^{2n}))$.

Indication : vérifier que $\Lambda^n(\mathbb{C}^{2n})$ est un $O(2n)$-module simple avec $\varpi_{\alpha_{n-1},D} = \sigma\varpi_{\alpha_{n,D}}$.

9) Soit $N \in \mathbb{N}$. On note : $V_{\mathbb{R}^m,N} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x_1^{p_1}\ldots x_m^{p_m})_{p_1+\ldots+p_m=N}$.

On sait que le $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$-module $V_{\mathbb{R}^m,N}$ a pour plus grand poids $N\lambda_1$.

a) On munit $V_N := V_{\mathbb{R}^m,N}$ du produit scalaire de base orthonormée $\left(\frac{x_1^{p_1}\ldots x_m^{p_m}}{\sqrt{p_1!\cdots p_m!}}\right)_{p_1+\ldots+p_m=N}$.

Démontrer que l'action de $SO(m)$ sur V_N est unitaire.

Indication : on a $\langle P, Q\rangle = \partial_{c^{-1}(P)}\overline{Q}$ où d'une part $c\colon S^N(\mathbb{C}^m) \to V_N$ est l'isomorphisme de $SO(m)$-modules complexes issu de l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $S(\mathbb{R}^m) \to S((\mathbb{R}^m)^*)$ qui prolonge l'isomorphisme de $SO(m)$-modules réels $v \in \mathbb{R}^m \mapsto \langle\ ,v\rangle \in (\mathbb{R}^m)^*$ et d'autre part on note $\partial_\omega f = \sum\limits_{p_1,\ldots,p_m\in\mathbb{N}} a_{p_1,\ldots,p_m} \frac{\partial f}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_m^{p_m}}$ quand $\omega = \sum\limits_{p_1,\ldots,p_m\in\mathbb{N}} a_{p_1,\ldots,p_m} e_1^{p_1}\ldots e_m^{p_m} \in S(\mathbb{C}^m)$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, $(e_1, \ldots, e_m)$ base canonique de $\mathbb{R}^m$, donc $\partial_{g\omega}(gf) = g\big(\partial_\omega f\big)$ si $g \in GL(m,\mathbb{R})$.

b) On note : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ et $H_N := \{P \in V_N \mid \Delta P = 0\}$.

Démontrer que $\Delta\colon V_N \to V_N$ est un morphisme de $SO(m)$-modules et que $\Delta V_N = V_{N-2}$.

Indication : remarquer que H_N est l'orthogonal de $(x_1^2 + \ldots + x_m^2)V_{N-2}$ dans V_N.

c) Démontrer que H_N est un $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$-module simple de plus haut poids $N\lambda_1$.

Représentations de type réel, complexe, et quaternionien

10) Soient K un groupe de Lie réel compact connexe et T un tore maximal de K.

On pose : $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}\,K$ et $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\,T$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{g}$. On fixe une base B de $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

On considère une représentation irréductible de classe C^∞ de K dans un espace vectoriel complexe V de dimension finie. On dira(*)que V est :

– *de type complexe* si les K-modules V et $\overline{V}$ ne sont pas isomorphes ;

– *de type réel* s'il existe un isomorphisme de K-modules $\theta\colon V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ tel que $\theta^2 = \mathrm{id}$;

– *de type quaternionien* s'il existe un isomorphisme de K-modules $\theta\colon V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ tel que $\theta^2 = -\,\mathrm{id}$.

a) Démontrer que V est de type complexe (resp. réel, quaternionien) si et seulement si V n'a pas de forme bilinéaire K-invariante non-nulle (resp. a une forme bilinéaire K-invariante symétrique B non-nulle, a une forme bilinéaire K-invariante anti-symétrique B non-nulle).

b) On note $\mu \in \mathfrak{h}^*$ l'action de $\mathfrak{h}$ sur la droite contenant les vecteurs de V primitifs pour $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$.

Démontrer que V est de type complexe (resp. réel, quaternionien) si et seulement si $w_0\mu \neq -\mu$ $\big($resp. $w_0\mu = -\mu$ et $\sum\limits_{\alpha>0} \mu(H_\alpha)$ est pair, $w_0\mu = -\mu$ et $\sum\limits_{\alpha>0} \mu(H_\alpha)$ est impair$\big)$.

Indication cf. VII.4 : quand $w_0\mu = -\mu$, poser $H = \sum\limits_{\alpha>0} H_\alpha$, $E = \sum\limits_{\alpha\in B} X_\alpha$ et $F = \sum\limits_{\alpha\in B} \frac{1}{\varpi_\alpha(H)} X_{-\alpha}$, vérifier que V a pour plus haut poids $\mu_{|\mathbb{C}H}$ sous l'action de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}F$, noter W le sous-$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-module de V engendré par $V_{\mu_{|\mathrm{D}(\mathfrak{g})}}$, et vérifier que $B_{|W\times W} \neq 0$.

(*) On introduit $A := \mathbb{R}[K]$ (ou plus généralement une $\mathbb{R}$-algèbre associative unifère A).

On peut démontrer (N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 9*, Appendice II) qu'il existe une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphismes de A-modules simples réels de dimension finie sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de A-modules simples complexes de dimension finie modulo la conjugaison (où le conjugué $\overline{W}$ d'un A-module complexe W est le A-module complexe de groupe $(W, +)$ muni de l'action de $\mathbb{C}$ par $(\lambda, v) \mapsto \overline{\lambda}v$).

Elle envoie un A-module simple V_0 réel de dimension finie muni de l'action à gauche du corps $\mathrm{End}_A(V_0)$ sur : $V = (V_0)_{\mathbb{C}}$ si $\mathrm{End}_A(V_0) \overset{\text{corps}}{\simeq} \mathbb{R}$, ou $V = V_0$ muni de sa structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel si $\mathrm{End}_A(V_0) \overset{\text{corps}}{\simeq} \mathbb{C}$ et $\overline{V} \overset{A_{\mathbb{C}}\text{mod.}}{\not\simeq} V$, ou $V = V_0$ muni de sa structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel si $\mathrm{End}_A(V_0) \overset{\text{corps}}{\simeq} \mathbb{H} \supseteq \mathbb{C}$ et $\overline{V} \overset{A_{\mathbb{C}}\text{mod.}}{\simeq} V$.

Sa réciproque envoie un A-module simple V complexe de dimension finie sur : $V_0 := \{v \in V \mid \theta(v) = v\}$ lorsqu'il existe un isomorphisme de $A_{\mathbb{C}}$-modules $\theta\colon V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ tel que $\theta^2 = \mathrm{id}$ (un tel θ deviendra la conjugaison relative à V_0), ou $V_{|\mathbb{R}}$ si $\overline{V} \not\simeq V$, ou $V_{|\mathbb{R}}$ s'il existe un isomorphisme de $A_{\mathbb{C}}$-modules $\theta\colon V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ tel que $\theta^2 = -\,\mathrm{id}$ (un tel θ deviendra la multiplication par j dans V).