Classification des algèbres de Lie réelles de dimension ≤ 3

Proposition

Les algèbres de Lie suivantes fournissent des représentants deux à deux non isomorphes des classes d'isomorphisme des algèbres de Lie réelles de dimension ≤ 3 :

$\{0\}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^3$;

$\mathbb{R} \,{}_{\cdot\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\!\ltimes \mathbb{R} \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{a,b\,\in\,\mathbb{R}}$ « algèbre de Lie du groupe affine de $\mathbb{R}$ »,

$\mathbb{R} \,{}_{\cdot\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}\!\ltimes \mathbb{R}^2 \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{x,y,t\,\in\,\mathbb{R}} \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{h}_3$ « algèbre de Lie du groupe de Heisenberg de dimension 3 »,

$\mathbb{R} \,{}_{\cdot\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)}\!\ltimes \mathbb{R}^2 \left(\overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \,{}_{\cdot\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\!\ltimes \mathbb{R}) \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\right\}_{a,b,d\,\in\,\mathbb{R}} \text{ quand } \alpha = 0 \right)$ avec $\alpha \in [-1, 1]$,

$\mathbb{R} \,{}_{\cdot\left(\begin{smallmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{smallmatrix}\right)}\!\ltimes \mathbb{R}^2 \left(\overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \mathfrak{so}(2) \,{}_{\mathrm{can}}\!\ltimes \mathbb{R}^2 \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -t & x \\ t & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{t,x,y\,\in\,\mathbb{R}} \text{ quand } \beta = 0 \right)$ avec $\beta \in \mathbb{R}^+$,

$\mathbb{R} \,{}_{\cdot\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}\!\ltimes \mathbb{R}^2$,

$\mathfrak{so}(3) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{x,y,z\,\in\,\mathbb{R}} \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \mathfrak{su}(2)$,

$\mathfrak{so}(1,2) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -x_2 & x_1 \\ -x_2 & 0 & x_0 \\ x_1 & -x_0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{x_0,x_1,x_2\,\in\,\mathbb{R}} \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Démonstration

La construction des isomorphismes est laissée au lecteur.

• Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle non commutative de dimension ≤ 3.
On a : $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ et l'idéal $\mathrm{D}(\mathfrak{g}) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Vect}([U,V])_{U,V\,\in\,\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ est non nul.

<u>1er cas :</u> $\dim \mathfrak{g} = 2$.

Ici, $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ est une droite $\mathbb{R}X$. On complète (X) en une base (X,Y) de $\mathfrak{g}$.
Quitte à remplacer Y par un multiple, on peut supposer que $[X,Y] = -X$.
D'où : $\mathfrak{g} = \mathbb{R}Y \ltimes \mathbb{R}X \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \mathbb{R} \,{}_{\cdot\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\!\ltimes \mathbb{R}$.

<u>2ème cas :</u> $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathrm{D}(\mathfrak{g}) = 1$.

Soit $X \in \mathrm{D}(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$. La forme bilinéaire antisymétrique B sur $\mathfrak{g}$ définie par l'égalité $[U,V] = B(U,V)\,X$ pour $U,V \in \mathfrak{g}$ a un noyau de codimension paire. Or ce noyau est $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$.
Donc : $\dim \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = 1$.

a) Si $\mathrm{D}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$: on complète (X) en une base (X,Y,Z) de $\mathfrak{g}$, puis, quitte à remplacer Z par un multiple, on peut supposer que $B(Y,Z) = -1$;
d'où : $\mathfrak{g} = \mathbb{R}Z \ltimes (\mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y) \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \mathbb{R} \,{}_{\cdot\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}\!\ltimes \mathbb{R}^2$.

b) Si $\mathrm{D}(\mathfrak{g}) \neq \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$: on fixe $Y \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$ et complète (X,Y) en une base (X,Y,Z) de $\mathfrak{g}$, puis, quitte à remplacer Z par un multiple, on peut supposer que $B(X,Z) = -1$;
d'où : $\mathfrak{g} = \mathbb{R}Z \ltimes (\mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y) \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \mathbb{R} \,{}_{\cdot\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}\!\ltimes \mathbb{R}^2$.

<u>3ème cas :</u> $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathrm{D}(\mathfrak{g}) = 2$.

On complète une base (X,Y) de $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ en une base (X,Y,Z) de $\mathfrak{g}$.

– On suppose, par l'absurde, que $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ est non commutative.
D'après le 1er cas, on peut choisir (X,Y) telle que $[X,Y] = -X$.
On a : $\mathrm{ad}\,Z \cdot X = \mathrm{ad}\,Z \cdot [Y,X] = [\mathrm{ad}\,Z \cdot Y, X] + [Y, \mathrm{ad}\,Z \cdot X] \in \mathrm{D}(\mathrm{D}(\mathfrak{g})) = \mathbb{R}X$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{ad}\,Z \cdot X = tX$. La ligne précédente devient $tX = [\mathrm{ad}\,Z \cdot Y, X] + tX$.
Donc l'élément $\mathrm{ad}\,Z \cdot Y$ de $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ commute avec X et par suite est multiple de X.
Cela donne une contradiction : $\underbrace{\mathrm{D}(\mathfrak{g})}_{\dim 2} = \mathrm{Vect}(\underbrace{[X,Y]}_{-X}, \underbrace{[Y,Z]}_{\text{multiple de } X}, \underbrace{[Z,X]}_{tX}) = \mathbb{R}X$.

– Ainsi : $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ est commutative. On pose : $A = \mathfrak{Mat}_{(X,Y)}\big(\mathrm{ad}(Z)|_{\mathrm{D}(\mathfrak{g})}\big)$.
Donc : $\mathfrak{g} = \mathbb{R}Z \ltimes (\mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y) \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \mathbb{R} \,._A\!\ltimes\, \mathbb{R}^2$.
Comme $\mathrm{D}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{[X,Y]}_{0}, [Y,Z], [Z,X]) = \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}(Z)|_{\mathrm{D}(\mathfrak{g})}$, A est inversible.
L'étude des orbites de $\mathrm{int}\, GL(2,\mathbb{R})$ montre qu'on peut modifier (X,Y) de façon que :
$A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $|\lambda| \geq |\mu|$, ou, $A = \nu \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec $\nu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ou, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\frac{a}{b} \geq 0$.
Quitte à remplacer Z par un multiple, on peut supposer que :
$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha \in [-1,1] \setminus \{0\}$, ou, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, ou, $A = \left(\begin{smallmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{smallmatrix}\right)$ avec $\beta \in \mathbb{R}^+$.
Les algèbres de Lie $\mathbb{R} \,._A\!\ltimes\, \mathbb{R}^2$ associées aux matrices A qui précèdent sont non isomorphes, puisque la droite $\mathfrak{g}/\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ a un élément dont l'action adjointe dans $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ est respectivement : de valeurs propres 1 et α, ou , unipotente $\neq \mathrm{id}$, ou, de valeurs propres $\beta \pm i$.

<u>$4^{\text{ème}}$ cas :</u> $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathrm{D}(\mathfrak{g}) = 3$.

La donnée d'une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathfrak{g}$ fournit un produit vectoriel $\wedge$ sur $\mathfrak{g}$ associé au produit scalaire et à l'orientation pour lesquels $\mathscr{B}$ est orthonormée directe.
Ainsi : $[u,v] = f(u \wedge v)$ pour $u, v \in \mathfrak{g}$, où $f \in \mathscr{L}(\mathfrak{g})$ envoie $v_i \wedge v_j$ sur $[v_i, v_j]$, $1 \leq i < j \leq 3$.
Comme $\dim \mathrm{D}(\mathfrak{g}) = 3$: f est bijective.
Donc : $f(v_1) \wedge v_1 + f(v_2) \wedge v_2 + f(v_3) \wedge v_3 = f^{-1}\Big([[v_2,v_3],v_1] + [[v_3,v_1],v_2] + [[v_1,v_2],v_3]\Big) = 0$, puis en passant aux coordonnées, $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}} f$ est symétrique.
Dans ce qui suit on notera $\mathrm{sg}(t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{t}{|t|}$ le signe d'un réel $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
On fixe une base orthonormée directe (X_0, Y_0, Z_0) de $\mathfrak{g}$ qui diagonalise f.
Quitte à modifier cette base par une permutation circulaire, on peut supposer que :
$\underbrace{[X_0, Y_0]}_{f(Z_0)} = \nu\, Z_0$, $\underbrace{[Y_0, Z_0]}_{f(X_0)} = \lambda\, X_0$, $\underbrace{[Z_0, X_0]}_{f(Y_0)} = \mu\, Y_0$, avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathrm{sg}(\mu) = \mathrm{sg}(\nu)$.
On pose : $X = |\mu\nu|^{-1/2} X_0$, $Y = |\nu\lambda|^{-1/2} Y_0$, $Z = \mathrm{sg}\,\nu \times |\lambda\mu|^{-1/2} Z_0$.
Donc : $[X,Y] = Z$, $[Y,Z] = \mathrm{sg}(\lambda\mu)\, X$, $[Z,X] = Y$.
On a : $\mathfrak{Mat}_{(X,Y,Z)}\, \mathrm{ad}(xX + yY + zZ) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{sg}(\lambda\mu)\, z & \mathrm{sg}(\lambda\mu) y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ pour $x, y, z \in \mathbb{R}$.
D'où : $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \overset{\text{alg Lie}}{\xrightarrow{\sim}} \mathfrak{so}(3)$ si $\mathrm{sg}(\lambda\mu) = 1$, et $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \overset{\text{alg Lie}}{\xrightarrow{\sim}} \mathfrak{so}(1,2)$ si $\mathrm{sg}(\lambda\mu) = -1$.
Les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{so}(1,2)$ sont non isomorphes, car compte tenu de la matrice de $\mathrm{ad}(xX + yY + zZ)$, la forme bilinéaire symétrique $K_{\mathfrak{g}} \colon (u,v) \mapsto \mathrm{tr}\,\big((\mathrm{ad}\, u)(\mathrm{ad}\, v)\big)$ de $\mathfrak{g}$ a pour signature $(0,3)$ si $\mathrm{sg}(\lambda\mu) = 1$ et $(2,1)$ si $\mathrm{sg}(\lambda\mu) = -1$.

• Réciproquement, chacune des algèbres de Lie non commutatives de la proposition apparait dans un seul cas parmi le 1[er] cas, le 2[e] cas a), le 2[e] cas b), le 3[e] cas, et le 4[e] cas. Elles sont par conséquent deux à deux non isomorphes. □