Groupes de Lie classiques : centre et topologie (J-Y D)

On fixe $n, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $p \geq q$ et $p + q = n$.
Dans chaque cas on posera : $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ et $K = U(n) \cap G$.

Dans le tableau suivant, K, G/G^0 et $\Pi_1(G, 1)$ sont donnés à isomorphisme près.

G	centre(G)	centre$(\mathfrak{g})$	K	G/G^0	$\Pi_1(G,1)$
$GL(n,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}$	$O(n)$	$\{\pm 1\}$	0 si $n=1$ $\mathbb{Z}$ si $n=2$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n\geq 3$
$SL(n,\mathbb{R})$	$\{1\}$ si n impair $\{\pm 1\}$ si n pair	0	$SO(n)$	1	0 si $n=1$ $\mathbb{Z}$ si $n=2$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n\geq 3$
$GL(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$	$\mathbb{C}$	$U(n)$	1	$\mathbb{Z}$
$SL(n,\mathbb{C})$	$\{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}\}_{0\leq k<n}$	0	$SU(n)$	1	0
$GL(n,\mathbb{H})$ $= U^*(2n)$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}$	$Sp(n)$	1	0
$SL(n,\mathbb{H})$ $= SU^*(2n)$	$\{\pm 1\}$	0	$Sp(n)$	1	0
$\boldsymbol{O(n)}$	$\{\pm 1\}$	0 si $n\neq 2$ $o(2)$ si $n=2$	$O(n)$	$\{\pm 1\}$	0 si $n=1$ $\mathbb{Z}$ si $n=2$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n\geq 3$
$O(p,q)$	$\{\pm 1\}$	0 si $n\neq 2$ $o(p,q)$ si $n=2$	$O(p)\times O(q)$	$\{\pm 1\}\times\{\pm 1\}$	$\Pi_1(O(p),1)\times\Pi_1(O(q),1)$
$\boldsymbol{SO(n)}$	$\{1\}$ si n impair $\{\pm 1\}$ si n pair $\neq 2$ $SO(2)$ si $n=2$	0 si $n\neq 2$ $so(2)$ si $n=2$	$SO(n)$	1	0 si $n=1$ $\mathbb{Z}$ si $n=2$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n\geq 3$
$SO(p,q)$	$\{1\}$ si n impair $\{\pm 1\}$ si n pair $\neq 2$ $SO(p,q)$ si $n=2$	0 si $n\neq 2$ $so(p,q)$ si $n=2$	$S(O(p)\times O(q))$	$\{\pm 1\}$	$\Pi_1(SO(p),1)\times\Pi_1(SO(q),1)$
$O(n,\mathbb{C})$	$\{\pm 1\}$	0 si $n\neq 2$ $o(2,\mathbb{C})$ si $n=2$	$O(n)$	$\{\pm 1\}$	0 si $n=1$ $\mathbb{Z}$ si $n=2$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n\geq 3$
$SO(n,\mathbb{C})$	$\{1\}$ si n impair $\{\pm 1\}$ si n pair $\neq 2$ $SO(2,\mathbb{C})$ si $n=2$	0 si $n\neq 2$ $so(2,\mathbb{C})$ si $n=2$	$SO(n)$	1	0 si $n=1$ $\mathbb{Z}$ si $n=2$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n\geq 3$
$Sp(2n,\mathbb{R})$	$\{\pm 1\}$	0	$U(n)$	1	$\mathbb{Z}$
$Sp(2n,\mathbb{C})$	$\{\pm 1\}$	0	$Sp(n)$	1	0
$\boldsymbol{U(n)}$	$\mathbb{C}_u$	$i\mathbb{R}$	$U(n)$	1	$\mathbb{Z}$
$U(p,q)$	$\mathbb{C}_u$	$i\mathbb{R}$	$U(p)\times U(q)$	1	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
$\boldsymbol{SU(n)}$	$\{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}\}_{0\leq k<n}$	0	$SU(n)$	1	0
$SU(p,q)$	$\{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}\}_{0\leq k<n}$	0	$S(U(p)\times U(q))$	1	$\mathbb{Z}$
$U_{\mathbb{H}}(I_{p,q})$ $= Sp(p,q)$	$\{\pm 1\}$	0	$Sp(p)\times Sp(q)$	1	0
$\boldsymbol{U_{\mathbb{H}}(I_n)}$ $= \boldsymbol{Sp(n)}$	$\{\pm 1\}$	0	$Sp(n)$	1	0
$U_{\mathbb{H}}(jI_n)$ $= SO^*(2n)$	$\{\pm 1\}$ si $n\neq 1$ $SO(2)$ si $n=1$	$\{\pm 1\}$ si $n\neq 1$ $so(2)$ si $n=1$	$U(n)$	1	$\mathbb{Z}$