Groupes de Lie connexes réels de dimension ≤ 3

Proposition

(a) Toute algèbre de Lie réelle de dimension 1 est commutative.

(b) Les classes d'isomorphisme de groupes de Lie réels connexes de dimension ≤ 3, dont l'algèbre de Lie est commutative, ont pour représentants non isomorphes :
$\{0\}$; $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}_u := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$; $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}_u \times \mathbb{R}$, $(\mathbb{C}_u)^2$; $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}_u \times \mathbb{R}^2$, $(\mathbb{C}_u)^2 \times \mathbb{R}$, $(\mathbb{C}_u)^3$.

Proposition

On note : $GA(\mathbb{R})_0 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}_{a>0 \text{ et } b \in \mathbb{R}}$ « composante neutre du groupe affine de $\mathbb{R}$ ».
Le groupe de Lie $GA(\mathbb{R})_0$ est simplement connexe et $\mathrm{Z}(GA(\mathbb{R})_0) = \{I\}$.

Le groupe de Lie $GA(\mathbb{R})_0$, d'algèbre de Lie résoluble non-nilpotente, est à isomorphisme près le seul groupe de Lie connexe réel de dimension 2 d'algèbre de Lie non-commutative.

Proposition

On note : $H_3 := \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{x,y,t \in \mathbb{R}}$ « groupe de Heisenberg de dimension 3 ».
Le groupe de Lie H_3 est simplement connexe et $\mathrm{Z}(H_3) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Les classes d'isomorphisme de groupes de Lie connexes réels de dimension 3, dont l'algèbre de Lie est nilpotente non-commutative, ont pour représentants non isomorphes :
H_3 et H_3/Γ, où $\Gamma =:= \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Proposition

(a) À chaque $A \in GL(2, \mathbb{R})$ sans valeur propre dans $\mathrm{i}\mathbb{R}$, on associe le groupe :
$\mathbb{R}_{\exp(\cdot A)} \ltimes \mathbb{R}^2 := \{\left(\begin{smallmatrix} \exp(tA) & v \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}_{t \in \mathbb{R} \text{ et } v \in \mathbb{R}^2}$ qui est un sous-groupe de Lie de $GL(3, \mathbb{R})$.
(Découle de : $\|\exp(tA)\| + \|\exp(tA)\|^{-1} \to +\infty$ quand $t \to -\infty$ et quand $t \to +\infty$.)
Le groupe de Lie $\mathbb{R}_{\exp(\cdot A)} \ltimes \mathbb{R}^2$ est simplement connexe et $\mathrm{Z}(\mathbb{R}_{\exp(\cdot A)} \ltimes \mathbb{R}^2) = \{I\}$.

(b) On note : $\text{Dépl}(\mathbb{R}^2) := \left\{\left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t & x \\ \sin t & \cos t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{x,y,t \in \mathbb{R}}$ « groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$ »
et $\widetilde{\text{Dépl}(\mathbb{R}^2)} := \left\{\left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t & x & 0 \\ \sin t & \cos t & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{smallmatrix}\right)\right\}_{x,y,t \in \mathbb{R}}$.
Le groupe de Lie $\widetilde{\text{Dépl}(\mathbb{R}^2)}$ est simplement connexe et $\mathrm{Z}(\widetilde{\text{Dépl}(\mathbb{R}^2)}) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\pi n} \end{smallmatrix}\right)\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

(c) Les classes d'isomorphisme de groupes de Lie connexes réels de dimension 3, dont l'algèbre de Lie est résoluble non-nilpotente, ont pour représentants non isomorphes :
$GA(\mathbb{R})_0$; $\mathbb{R} \times GA(\mathbb{R})_0$, $\mathbb{C}_u \times GA(\mathbb{R})_0$;
$\left\{\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & x \\ 0 & \mathrm{e}^{\alpha t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{x,y,t \in \mathbb{R}}$ où $\alpha \in [-1, 1] \backslash \{0\}$, $\left\{\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^{t\beta} \cos t & -\mathrm{e}^{t\beta} \sin t & x \\ \mathrm{e}^{t\beta} \sin t & \mathrm{e}^{t\beta} \cos t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{x,y,t \in \mathbb{R}}$ où $\beta > 0$, $\left\{\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & x \\ 0 & \mathrm{e}^t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}_{x,y,t \in \mathbb{R}}$;
$\widetilde{\text{Dépl}(\mathbb{R}^2)}$ et les $\widetilde{\text{Dépl}(\mathbb{R}^2)}/C_m$, où C_m est le sous-groupe de $\mathrm{Z}(\widetilde{\text{Dépl}(\mathbb{R}^2)})$ d'indice $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Remarque

On peut démontrer que si un groupe de Lie réel G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est tel que $\exp_G \colon \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme, alors G est simplement connexe et $\mathfrak{g}$ est résoluble.
Le groupe $\widetilde{\text{Dépl}(\mathbb{R}^2)}$ est à isomorphisme près l'unique groupe de Lie réel simplement connexe G de dimension ≤ 3 d'algèbre de Lie résoluble tel que $\exp_G$ n'est pas un difféomorphisme.

Proposition

(a) Toute algèbre de Lie réelle non-résoluble de dimension 3 est semi-simple.

(b) On note : $SU(2) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \ ; \ a, b \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$.
Le groupe de Lie $SU(2)$ est simplement connexe et $\mathrm{Z}(SU(2)) = \{-I, I\}$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$ s'écrit :

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \ ; \ a \in \mathrm{i}\mathbb{R} \ \text{ et } \ b \in \mathbb{C} \right\}.$$

On munit $\mathfrak{su}(2)$ de la norme euclidienne N définie par :

$$N\left(\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)\right) = \left|\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right| = |a|^2 + |b|^2.$$

L'application adjointe de $SU(2)$ se restreint en un morphisme de groupes de Lie surjectif de $SU(2)$ sur le groupe $SO(N)$ des rotations de $\mathfrak{su}(2)$ pour N.

(c) On note : $SL(2,\mathbb{R}) = \{g \in GL(2,\mathbb{R}) \mid \det g = 1\}$.
Le groupe de Lie $SL(2,\mathbb{R})$ est connexe et $\mathrm{Z}(SL(2,\mathbb{R})) = \{-I, I\}$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de $SL(2,\mathbb{R})$ s'écrit :

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}.$$

On munit $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme quadratique q définie par :

$$q\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2+x_0 \\ x_2-x_0 & -x_1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_2+x_0 \\ x_2-x_0 & -x_1 \end{smallmatrix}\right| = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2.$$

L'application adjointe de $SL(2,\mathbb{R})$ se restreint en un morphisme de groupes de Lie surjectif de $SL(2,\mathbb{R})$ sur la composante connexe $SO_0(q)$ de id dans le groupe orthogonal de q.

(d) On note : $SO(3) = \{g \in GL(2,\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I \ \text{ et } \ \det g = 1\}$.
Le groupe de Lie $SO(3)$ est connexe d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{so}(3) := \{X \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}) \mid {}^t X = -X\}.$$

On note : $O(1,2) = \left\{ g \in GL(3,\mathbb{R}) \ \middle| \ {}^t g \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.
Le groupe de Lie $O(1,2)$ a pour algèbre de Lie :

$$\mathfrak{so}(1,2) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) \ \middle| \ {}^t X = -\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) X \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$

On note $SO_0(1,2)$ la composante connexe de I dans $O(1,2)$.
D'après (b) et (c), on a : $SU(2)/\{-I,I\} \overset{\text{gr. Lie}}{\simeq} SO(3)$ et $SL(2,\mathbb{R})/\{-I,I\} \overset{\text{gr. Lie}}{\simeq} SO_0(1,2)$.

(e) On note $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ « le» revêtement universel du groupe de Lie connexe $SL(2,\mathbb{R})$.

D'après (d) et la fin du résumé « Groupes de Lie réels et complexes », il existe un sous-groupe discret D de $\mathrm{Z}(\widetilde{SL(2,\mathbb{R})})$ tel que $SO_0(1,2)$ est isomorphe à $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}/D$.
De plus, on a : $\mathrm{Z}(\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}/D) = \mathrm{Z}(\widetilde{SL(2,\mathbb{R})})/D$.
Comme $\mathrm{Z}(SO_0(1,2)) = \{I\}$, on en déduit que $D = \mathrm{Z}(\widetilde{SL(2,\mathbb{R})})$.

D'autre part, d'après le milieu de la seconde page du résumé « Revêtements », le groupe D est aussi isomorphe à $\Pi_1(SO_0(1,2), I)$. Par passage au quotient de la décomposition d'Iwasawa de $SL(2,\mathbb{R})$, on constate que $\Pi_1(SO_0(1,2), I)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Finalement, le groupe $\mathrm{Z}(\widetilde{SL(2,\mathbb{R})})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

(d) Les classes d'isomorphisme de groupes de Lie connexes réels de dimension 3, dont l'algèbre de Lie est semi-simple, ont pour représentants non isomorphes :
$SU(2)$, $SO(3)$; $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ et les $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}/D_m$, où D_m est le sous-groupe de $\mathrm{Z}(\widetilde{SL(2,\mathbb{R})})$ d'indice $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\Big(\underbrace{\text{On a}}_{\text{le centre de } \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}/D_m \text{ a } m \text{ éléments}}$: $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}/D_1 \overset{\text{gr. Lie}}{\simeq} SO_0(1,2)$ et $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}/D_2 \overset{\text{gr. Lie}}{\simeq} SL(2,\mathbb{R})$.$\Big)$