Classes de conjugaison dans $SL(2,\mathbb{R})$

Soit $g=\left(\begin{smallmatrix} g_{1,1} & g_{1,2}\\ g_{2,1} & g_{2,2}\end{smallmatrix}\right)\in SL(2,\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{C}=\operatorname{int} SL(2,\mathbb{R})\cdot g$. La trace est constante sur $\mathscr{C}$.

Si $g=\left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec $\sin\alpha\neq 0$, un élément de $\mathscr{C}$ ne peut pas être conjugué sous $\operatorname{int} SL(2,\mathbb{R})$ à une matrice triangulaire (car ses valeurs propres seraient réelles) donc $g_{2,1}$ et $g_{1,2}$ restent par connexité de $SL(2,\mathbb{R})$ non-nuls de signes opposés sur $\mathscr{C}$, puis $g_{2,1}-g_{1,2}$ a un signe constant sur $\mathscr{C}$.

Si $g=\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon\\ 0 & \varepsilon_0\end{smallmatrix}\right)$ avec $\varepsilon_0,\varepsilon\in\{-1,1\}$, comme tout $\left(\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right)\in SL(2,\mathbb{R})$ vérifie $\operatorname{int}\left(\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right)\cdot g=\left(\begin{smallmatrix} \cdots & a^2\varepsilon\\ -b^2\varepsilon & \cdots\end{smallmatrix}\right)$, on constate que $g_{2,1}-g_{1,2}$ garde un signe constant sur $\mathscr{C}$.

Les classes de conjugaison $\operatorname{int} SL(2,\mathbb{R})\cdot g$ avec $g\notin\{-I,I\}$ sont :

– la classe de $\left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{smallmatrix}\right)$ d'équation $\frac12\operatorname{tr} g=\cos\alpha$ et $g_{2,1}<g_{1,2}$, avec $-\pi<\alpha<0$;
– la classe de $\left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{smallmatrix}\right)$ d'équation $\frac12\operatorname{tr} g=\cos\alpha$ et $g_{2,1}>g_{1,2}$, avec $0<\alpha<\pi$;
– la classe de $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)^{-1}$ d'équation $\frac12\operatorname{tr} g=\operatorname{ch}(\ln\lambda)$, avec $\lambda>1$;
– la classe de $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)^{-1}$ d'équation $\frac12\operatorname{tr} g=-\operatorname{ch}(\ln(-\lambda))$, avec $\lambda<-1$;
– la classe de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ d'équation $\frac12\operatorname{tr} g=1$ et $g_{2,1}<g_{1,2}$;
– la classe de $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ d'équation $\frac12\operatorname{tr} g=-1$ et $g_{2,1}>g_{1,2}$;
– la classe de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ d'équation $\frac12\operatorname{tr} g=1$ et $g_{2,1}>g_{1,2}$;
– la classe de $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0\\ -1 & -1\end{smallmatrix}\right)$ d'équation $\frac12\operatorname{tr} g=-1$ et $g_{2,1}<g_{1,2}$.

On note :
$SU(1,1)=\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & \overline{b}\\ b & \overline{a}\end{smallmatrix}\right)\ ;\ a,b\in\mathbb{C} \text{ et } |a|^2-|b|^2=1\right\}$,
$K:=U(2)\cap SU(1,1)=\left\{\left(\begin{smallmatrix} e^{-i\theta} & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{smallmatrix}\right)\ ;\ \theta\in\mathbb{R}\right\}$
$P^+:=H^+\cap SU(1,1)=\left\{\left(\begin{smallmatrix} r & \overline{c}\\ c & r\end{smallmatrix}\right)\ ;\ r>0 \text{ et } c\in\mathbb{C} \text{ avec } r^2-|c|^2=1\right\}$
donc $SU(1,1)=(\operatorname{int} C)(SL(2,\mathbb{R}))$ avec $C=\frac{1}{\sqrt2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i\\ 1 & i\end{smallmatrix}\right)$.

En particulier on dispose de la bijection $\operatorname{int} C^{-1}$ de l'ensemble des classes de conjugaison de $SL(2,\mathbb{R})$ sur celui des classes de conjugaison de $SU(1,1)$. Elle conserve les valeurs propres.

L'objectif est de dessiner les classes de conjugaison dans $SU(1,1)$ autres que $\{-I\}$ et $\{I\}$, et d'interpréter ce dessin en terme de classe de conjugaison autres que $\{-I\}$ et $\{I\}$ dans $SL(2,\mathbb{R})$.
Il reste à représenter les composantes connexes des surfaces $\boxed{\mathscr{S}_k:\ \frac12\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & \overline{b}\\ b & \overline{a}\end{pmatrix}=k}$ avec $k\in\mathbb{R}$ fixé.

On sait que P^+ est difféomorphe à $D:=\{z\in\mathbb{C}(|\ |z|<1\}$ au moyen de $\left(\begin{smallmatrix} r & \overline{c}\\ c & r\end{smallmatrix}\right)\mapsto\frac{\overline{c}}{r}$ et que le produit $K\times P^+\to SU(1,1)$ est un difféomorphisme. D'où le difféomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} SU(1,1) & \longrightarrow & \mathbb{C}_u\times D \qquad \text{où}\quad \mathbb{C}_u:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}.\\ \begin{pmatrix} a & \overline{b}\\ b & \overline{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & \overline{c}\\ c & r\end{pmatrix} & \longmapsto & (e^{i\theta},\frac{\overline{c}}{r})=(\frac{\overline{a}}{|a|},\frac{\overline{b}}{a})\end{array}$$

On schématise $\mathbb{C}_u\times D$ dans $\mathbb{R}^3$ en plaçant le point $(e^{i\theta},u+iv)$ de $\mathbb{C}_u\times D$ au niveau du point $((u+3)\cos\theta,(u+3)\sin\theta,v)$ de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées cylindriques (r,θ,z) de l'image de $\begin{pmatrix} a & \overline{b}\\ b & \overline{a}\end{pmatrix}$ vérifient $r-3+iz=\frac{\overline{b}}{a}$ avec $|a|^2-|b|^2=1$ puis $(1-(r-3)^2-z^2)|a|^2=1$, et $e^{i\theta}=\frac{\overline{a}}{|a|}$.
D'où : $\frac12\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & \overline{b}\\ b & \overline{a}\end{pmatrix}=\operatorname{Re} a=|a|\cos(\theta)=\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1-(r-3)^2-z^2}}$.

Soit $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. L'image de $\mathscr{S}_k$ dans $\mathbb{R}^3$ coupe le plan vectoriel de paramètre θ si et seulement si $\cos\theta$ a même signe que k et $0<|\cos\theta|<|k|$. Finalement, en coordonnées cylindriques (r,θ,z) :

$$\boxed{\mathscr{S}_k:\ r=3+\sqrt{1-\frac{\cos^2(\theta)}{k^2}}\cos(t)\ \text{ et }\ z=\sqrt{1-\frac{\cos^2(\theta)}{k^2}}\sin(t)}\quad \text{où}\ \ \theta,t\in[0,2\pi]\ \text{et}\ \left\{\begin{smallmatrix} 0<\cos\theta<k\\ \text{ou}\\ k<\cos\theta<0\end{smallmatrix}\right..$$

Dessin de $SL(2, \mathbb{R})$ issu de sa décomposition polaire

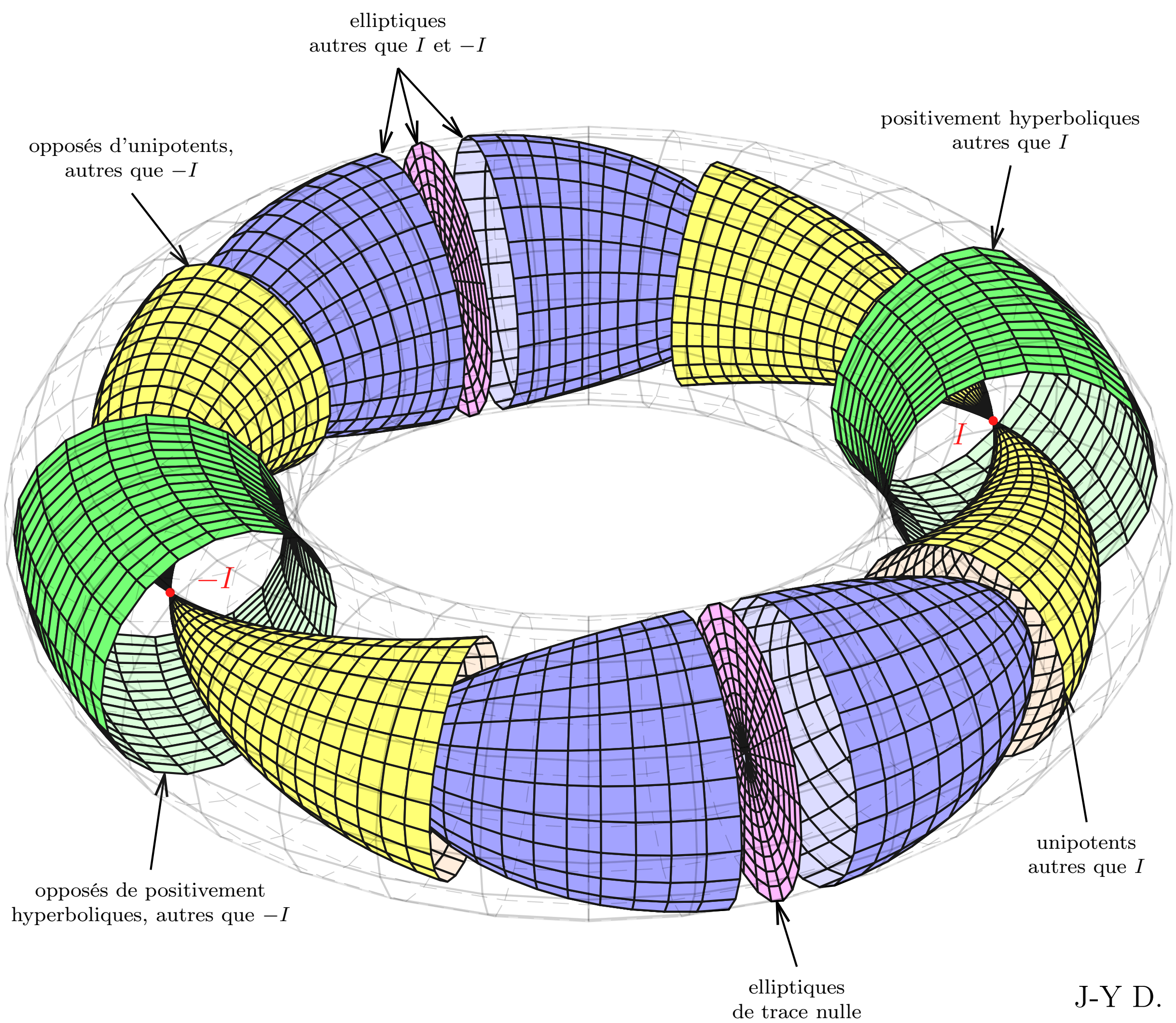
Idée : dessin de Graeme Segal dans *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras*, 1995, p. 57.
Animation : `http://www.imj-prg.fr/~jean-yves.ducloux/sl2/exp_sl2.html` (en ligne depuis 2000).

L'application exponentielle envoie :

– les 2 orbites nilpotentes autres que $\{0\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ sur les 2 classes de conjugaison unipotentes autres que $\{I\}$ de $SL(2, \mathbb{R})$;

– chaque orbite hyperbolique autre que $\{0\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ sur une classe de conjugaison positivement hyperbolique autre que $\{I\}$ de $SL(2, \mathbb{R})$;

– chaque orbite infinitésimalement elliptique de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ autre que $\{0\}$ sur une classe de conjugaison elliptique de $SL(2, \mathbb{R})$, qui peut être égale à $\{I\}$ ou à $\{-I\}$, avec au niveau du dessin un changement de concavité de l'image de la classe de conjugaison dans $\mathbb{R}^3$ quand sa trace change de signe.



J-Y D.