Orbites adjointes de $SL(2,\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2+x_0 \\ x_2-x_0 & -x_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{C} = \operatorname{Ad} SL(2,\mathbb{R})\cdot X$. Le déterminant est constant sur $\mathscr{C}$.

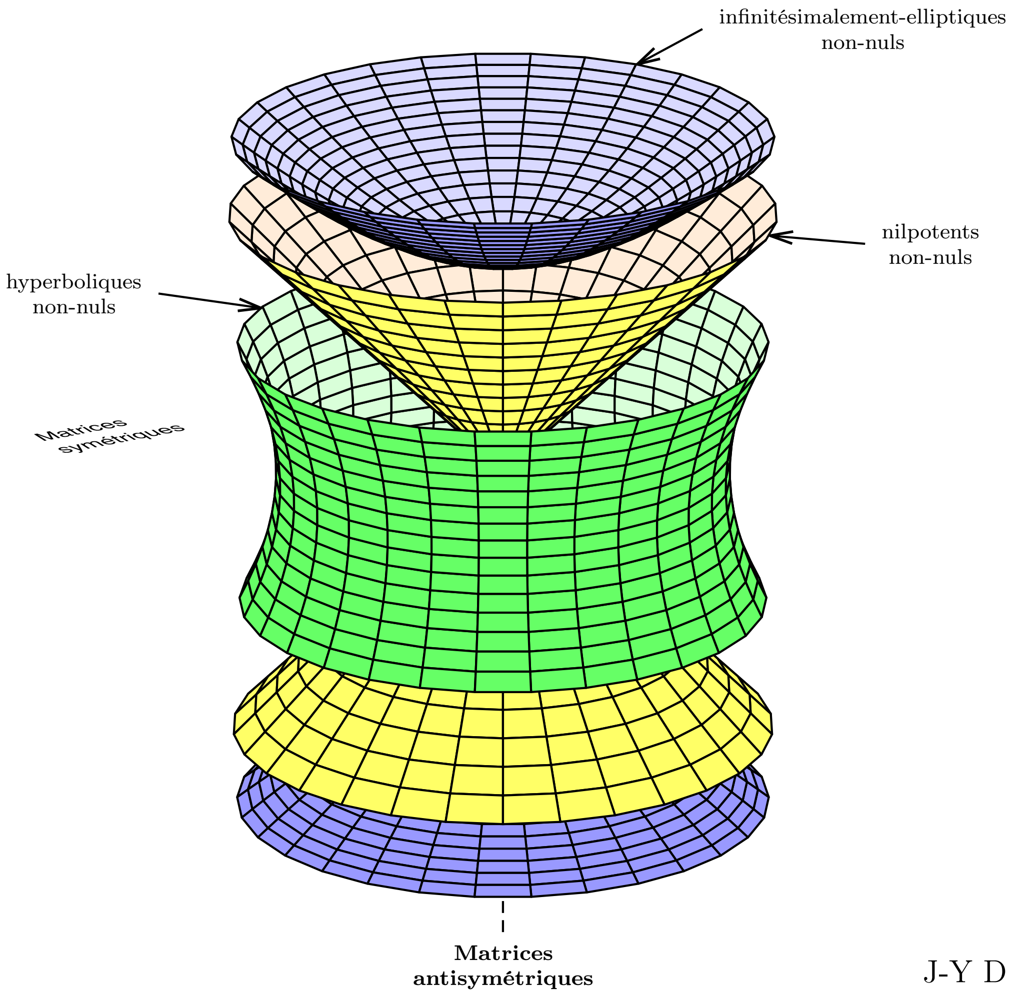
Si $X = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$, un élément de $\mathscr{C}$ ne peut pas être conjugué sous $\operatorname{Ad} SL(2,\mathbb{R})$ à une matrice triangulaire (car ses valeurs propres seraient réelles) donc $x_2 - x_0$ et $x_2 + x_0$ restent par connexité de $SL(2,\mathbb{R})$ non-nuls de signes opposés sur $\mathscr{C}$, puis x_0 a un signe constant sur $\mathscr{C}$.

Si $X = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, comme tout $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ vérifie $\operatorname{Ad} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} \cdots & a^2\varepsilon \\ -b^2\varepsilon & \cdots \end{pmatrix}$, on constate que x_0 garde un signe constant sur $\mathscr{C}$.

Les orbites adjointes $\operatorname{Ad} SL(2,\mathbb{R})\cdot X$ avec $X \neq 0$ sont :

– orbite de $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ d'équation $\det X = b^2$ et $x_0 > 0$, avec $b < 0$;
– orbite de $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ d'équation $\det X = b^2$ et $x_0 < 0$, avec $b > 0$; $\left[\exp X = (\cos b)I + \frac{\sin b}{b} X\right]$
– orbite de $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ d'équation $\det X = -a^2$, avec $a > 0$; $\leftarrow \left[\exp X = (\operatorname{ch} a)I + \frac{\operatorname{sh} a}{a} X\right]$
– orbite de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'équation $\det X = 0$ et $x_0 > 0$;
– orbite de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'équation $\det X = 0$ et $x_0 < 0$. $\left[\exp X = I + X\right]$

Pour dessiner les orbites adjointes dans $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ autres que $\{0\}$, on représente les composantes connexes des surfaces $\boxed{\mathscr{S}_k :\ \underbrace{\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2+x_0 \\ x_2-x_0 & -x_1 \end{pmatrix}}_{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2} = k}$ avec $k \in \mathbb{R}$ fixé, dans les coordonnées x_1, x_2, x_0.



J-Y D.