Action de groupe : à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

Soient G un groupe et E un ensemble.

(a) Une *action à gauche de G sur E* est une application $(g,x)\in G\times E\mapsto g\cdot x\in E$ vérifiant :

$$1_G\cdot x = x \text{ et } g\cdot(h\cdot x)=(g\,h)\cdot x \text{ pour tous } x\in E \text{ et } g,h\in G$$

Cela équivaut à la donnée d'un morphisme de groupes ρ de G dans l'ensemble $\mathrm{Aut}_{\mathrm{ens}}\,E$ des bijections de E sur E muni de $uv := u\circ v$, par : « $\rho(g)(x)=g\cdot x$ » pour $g,h\in G$ et $x\in E$.

(b) Une *action à droite de G sur E* est une application $(x,g)\in E\times G\mapsto x\cdot g\in E$ vérifiant :

$$x\cdot 1_G = x \text{ et } (x\cdot g)\cdot h = x\cdot(g\,h) \text{ pour tous } x\in E \text{ et } g,h\in G$$

Cela équivaut à la donnée d'un morphisme de groupes ρ de G dans l'ensemble $(\mathrm{Aut}_{\mathrm{ens}}\,E)^{\mathrm{opp}}$ des bijections de E sur E muni de $uv := v\circ u$, par : « $\rho(g)(x)=x\cdot g$ » pour $g,h\in G$ et $x\in E$.

Définition-Proposition

On se donne une action à gauche (resp. à droite) d'un groupe G sur un ensemble E et $x\in E$.

(a) On appelle *orbite de x sous G* l'ensemble $G\cdot x := \{g\cdot x\}_{g\in G}$. (resp. $x\cdot G := \{x\cdot g\}_{g\in G}$).

On pose : $G\backslash E := \{G\cdot a\}_{a\in E}$ (resp. $E/G := \{a\cdot G\}_{a\in E}$).

On appelle *stabilisateur de x dans G* le sous-groupe suivant de G :

$$G(x) := \{g\in G \mid g\cdot x = x\} \quad (\text{resp. } G(x) := \{g\in G \mid x\cdot g = x\}).$$

(b) L'action de $G(x)$ sur G par produit à droite (resp. à gauche) fournit $G/G(x)$ (resp. $G(x)\backslash G$).

L'application $\begin{array}{rcl} G/G(x) & \to & G\cdot x \\ g\,G(x) & \mapsto & g\cdot x\end{array}$ $\left(\text{resp. } \begin{array}{rcl} G(x)\backslash G & \to & x\cdot G \\ G(x)\,g & \mapsto & x\cdot g\end{array}\right)$ est bijective.

Proposition

Soient G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, et M une variété sur $\mathbb{K}$.
On se donne une action à gauche de G sur M telle que $\begin{array}{rcl} G\times M & \to & M \\ (x,g) & \mapsto & x\cdot g\end{array}$ est un morphisme de variétés.

(a) Soit $x\in M$. On pose : $X\cdot x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\exp(tX)\cdot x\big)_{t=0}$ pour $X\in\mathfrak{g}^{(*)}$et $\mathfrak{g}(x)=\{X\in\mathfrak{g} \mid X\cdot x = 0\}$.

Le groupe $G(x)$ est un sous-groupe de Lie de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(x)$. ← [cf. le théorème du rang constant]

(b) On définit un morphisme d'algèbres de Lie $X\mapsto X_M$ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M en posant : $X_M(x) := -X\cdot x$ pour tous $X\in\mathfrak{g}$ et $x\in M$. Autrement dit, on a : $(X_M\cdot\varphi)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi\big(\exp(-tX)\cdot x\big)_{t=0}$ pour $X\in\mathfrak{g}$, $\varphi\colon \underset{\text{ouvert de } M}{U \to} \mathbb{K}$ morphisme de variétés et $x\in M$.

Les application $(g,\varphi)\mapsto\varphi(g^{-1}\cdot\,)$ et $(X,\varphi)\mapsto X_M\cdot\varphi$ fournissent des structures de G-module et de $\mathfrak{g}$-module sur l'espace vectoriel des morphismes de variétés de M dans $\mathbb{K}$.

Proposition

Soient G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, M une variété sur $\mathbb{K}$ et $x\in M$.
On se donne une action à gauche de G sur M telle que $\begin{array}{rcl} G\times M & \to & M \\ (x,g) & \mapsto & x\cdot g\end{array}$ est un morphisme de variétés.

(a) L'injection canonique $i_x\colon \begin{array}{rcl} G/G(x) & \to & M \\ g\,G(x) & \mapsto & g\cdot x\end{array}$ est une immersion.

(b) L'application i_x est un plongement si et seulement si $G\cdot x$ est $\overbrace{\text{localement fermée}}^{\text{tout } y\in G\cdot x \text{ a un voisinage } V \text{ dans } M \text{ tel que } (G\cdot x)\cap V \text{ est un fermé de } V}$ dans M.

En particulier : si $M = G\cdot x$, alors i_x est un difféomorphisme de $G/G(x)$ sur M.

$(*)$ Quand M est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une représentation ρ de G qui est C^∞ quand $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et holomorphe quand $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on a : $X\cdot x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\rho(\exp(tX)(x)\big)_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\exp(t(\mathrm{Lie}\,\rho)(X))(x)\big)_{t=0} = (\mathrm{Lie}\,\rho)(X)(x)$.

Exemple 1

Soient G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $n \in \mathbb{N}$.

(a) Le groupe G agit sur lui-même par *automorphismes intérieurs* au moyen du morphisme de groupes int défini par : $\boxed{(\operatorname{int} g)(h) = ghg^{-1}}$ pour $g, h \in G$.

(b) Le groupe G agit sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par *l'action adjointe* au moyen du morphisme de groupes Ad défini par : $(\operatorname{Ad} g)(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(g \exp(tX) g^{-1}\big)_{t=0}$ pour $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$.

Si G est un sous-groupe de Lie $GL(n, \mathbb{K})$, on a : $\boxed{(\operatorname{Ad} g)(X) = gXg^{-1}}$ pour $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$.

(c) L'application tangente à l'application Ad en 1, notée ad, est reliée à $\mathfrak{g}$ par :

$$\boxed{(\operatorname{ad} X)(Y) = [X, Y]} \quad \text{pour } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Exemple 2

Soient G un groupe de Lie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.
On se donne une représentation ρ de G dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie V, qui est C^∞ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et holomorphe quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On lui associe la représentation $\pi = \operatorname{Lie} \rho$ de $\mathfrak{g}$ dans V.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le groupe G agit sur $T^n(V)$ par : $g(v_1 \otimes ... \otimes v_n) = (gv_1) \otimes (gv_2) \otimes ... \otimes (gv_n)$.
Cette représentation $T^n(\rho)$ de G fournit la représentation $\operatorname{Lie}(T^n(\rho))$ suivante de $\mathfrak{g}$:
$X(v_1 \otimes ... \otimes v_n) = (Xv_1) \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n \,+\, v_1 \otimes (Xv_2) \otimes ... \otimes v_n \,+\, \cdots + \,+ v_1 \otimes ... \otimes v_{n-1}. \otimes (Xv_n)$.
Les représentations de $\mathfrak{g}$ dans $S^n(V)$ et $\Lambda^n(V)$ quotients de $T^n(V)$ sont les dérivées de celles de G.(*)

Le groupe G et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agissent aussi dans l'espace vectoriel des morphismes de variétés de $M := V^*$ dans $\mathbb{K}$ par : $(g \cdot \varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)$ et $(X \cdot \varphi)(x) = -\mathrm{d}\varphi(x)(X \cdot x)$.
Cela prolonge les actions de G et $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre $S(V)$ des applications polynomiales de V^* dans $\mathbb{K}$.

Exemple 3

(a) On note $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^2$.

La bijection $\varphi\colon\ \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ permet d'identifier $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ à $\underbrace{\mathbb{K} \cup \{\infty\}}_{\text{on a fixé } \infty \notin \mathbb{K}}$.

$$\mathbb{K}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \mapsto \begin{cases} \frac{u}{v} & \text{si } v \neq 0 \\ \text{ou} \\ \infty & \text{si } v = 0 \end{cases}$$

(b) On définit une action du groupe $SL(2, \mathbb{K})$ sur l'ensemble $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ en posant :

$$g \cdot \mathbb{K}v = \mathbb{K}(gv) \quad \text{pour } g \in SL(2, \mathbb{K}) \text{ et } v \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}.$$

Elle fournit donc, compte tenu de la bijection du (a), l'action « par homographies » suivante du groupe $SL(2, \mathbb{K})$ sur l'ensemble $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$:

$$g \cdot z := \varphi\big(g \cdot \varphi^{-1}(z)\big) = \begin{cases} \varphi\big(\mathbb{K}(g\left(\begin{smallmatrix} z \\ 1 \end{smallmatrix}\right))\big) & \text{si } z \neq \infty \\ \text{ou} \\ \varphi\big(\mathbb{K}(g\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))\big) & \text{si } z = \infty \end{cases} = \frac{az + c}{bz + d} \quad \text{pour } g = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2, \mathbb{K}) \text{ et } z \in \mathbb{K} \cup \{\infty\},$$

avec les conventions $\frac{az+c}{bz+d} = \infty$ quand $z = -\frac{d}{b}$, et, $\frac{az+c}{bz+d} = \lim_{|z| \to +\infty} \frac{az+c}{bz+d}$ quand $z = \infty$.

Exemple 4

Soient G un groupe de Lie $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

(a) On dit que $\mathfrak{g}$ est *réductive* si elle est somme directe d'une sous-algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{s}$ et d'une sous-algèbre de Lie commutative $\mathfrak{z}$ telles que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{z}] = \{0\}$.

(b) On suppose que $\mathfrak{g}$ est réductive. On appelle *sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui est de dimension maximale parmi les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que tous les $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X$ avec $X \in \mathfrak{h}$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

(c) Le groupe G agit par Ad sur l'ensemble $\operatorname{Car} \mathfrak{g}$ des sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

(*) Soit E un G-module de dimension finie. On le suppose associée à un morphisme de variétés de G dans $GL(E)$. On considère un sous-module F de E et note p la projection canonique de E sur E/F. En dérivant à $v \in E$ fixé l'égalité $g \cdot p(v) = p(g \cdot v)$ par rapport à g, on constate que la structure de $\mathfrak{g}$-module de E/F obtenue en dérivant celle de G est celle du $\mathfrak{g}$-module quotient pour les structures de $\mathfrak{g}$-modules de E et de F issues de celles de G.