Algèbre enveloppante : à retenir (J-Y D)

Références

• J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes.* Cote : 25 DIX 74 (traductions 25 DIX 77 puis 25 DIX 96).

• A. W. Knapp *Lie groups beyond an introduction*, chapitres III et V 5. Cote : 25 KNA 96 (édition augmentée 25 KNA 02).

On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Rappel et compléments

Définition-Proposition

(a) L'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ est l'algèbre associative unifère quotient $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/\mathscr{I}$, où $\mathscr{I}$ est l'idéal de $T(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ avec $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Quand $\mathfrak{g}$ est commutative, on a donc : $U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$.

(b) Tout morphisme d'algèbres de Lie f de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre associative unifère A munie de $[x, y] := xy - yx$ se prolonge (cf. PBW) en un unique morphisme d'algèbres unifère $\overline{f} \colon U(\mathfrak{g}) \to A$.

Remarque

(a) On appelle *inversion* de $U(\mathfrak{g})$ l'anti-automorphisme d'algèbre $u \in U(\mathfrak{g}) \mapsto \check{u} \in U(\mathfrak{g})$ tel que :

$$(X_1 ... X_n)^{\vee} = (-1)^n X_n ... X_1 \quad \text{pour} \quad X_1, ..., X_n \in \mathfrak{g}, \text{ où } \mathfrak{g} \underset{\text{PBW}}{\subseteq} U(\mathfrak{g}).$$

(b) Tout $U(\mathfrak{g})$-module à droite V a une structure de $U(\mathfrak{g})$-module à gauche déterminée par :

$$u\, x = x\, \check{u} \quad \text{pour } u \in U(\mathfrak{g}) \text{ et } x \in V.$$

Définition

Soient X et Y deux variétés C^∞.

(a) On appelle *opérateur différentiel sur* X toute application linéaire $D \colon C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ qui s'écrit dans les cartes sous la forme $\sum\limits_{\substack{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \\ \text{et } |\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_m \leq k}} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_m^{\alpha_m}}$ avec les a_α de classe C^∞.

(b) L'image d'un opérateur différentiel D sur X par un difféomorphisme $f \colon X \to Y$ est l'opérateur différentiel $f_* D$ sur Y vérifiant : $(f_* D)(f_* \varphi) = f_*(D\varphi)$ pour $\varphi \in C^\infty(X)$, où $f_* \varphi := \varphi \circ f^{-1}$.

Proposition

On suppose que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie réel G.

On note $U(G_{\text{gauche}})_{\mathbb{C}}$ l'algèbre, pour la composition, des opérateurs différentiels sur G invariant par les translations à gauche et $(T_1^{(\infty)} G)_{\mathbb{C}}$ l'ensemble des distributions sur G de support dans $\{1_G\}$.

(a) L'application linéaire $\varphi \mapsto (D\varphi)(1)$ de $U(G_{\text{gauche}})_{\mathbb{C}}$ dans $(T_1^{(\infty)} G)_{\mathbb{C}}$ est bijective. Elle permet par transport de structure de munir $T_1^{(\infty)} G$ d'une structure d'algèbre (de convolution).

(b) Le morphisme d'algèbres unifère $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to (T_1^{(\infty)} G)_{\mathbb{C}}$ qui prolonge $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = (T_1 G)_{\mathbb{C}} \hookrightarrow (T_1^{(\infty)} G)_{\mathbb{C}}$ est bijectif. D'après (a), l'algèbre unifère $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est donc isomorphe à $U(G_{\text{gauche}})_{\mathbb{C}}$.

Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

Théorème (déjà vu)

(a) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ avec I totalement ordonnée.

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $U(\mathfrak{g})$ admet pour base la famille formée des $\overset{\cdot}{\widehat{X_{i_1}}}{}^{\alpha_1} ... \overset{\cdot}{\widehat{X_{i_n}}}{}^{\alpha_n}$ quand $n \in \mathbb{N}$ et $(i_1, ..., i_n) \in I^n$ vérifient $i_1 < \cdots < i_n$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$, où $\overset{\cdot}{\widehat{X_{i_1}}}{}^{\alpha_1} ... \overset{\cdot}{\widehat{X_{i_n}}}{}^{\alpha_n} = 1$ lorsque $n = 0$.

(b) L'application canonique i de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$ est donc $\underbrace{\text{injective}}_{\text{on écrira « } \mathfrak{g} \subseteq U(\mathfrak{g}) \text{ »}}$ puis $\mathfrak{g}$ engendre l'algèbre $U(\mathfrak{g})$.

Corollaire 1

(a) Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. L'application canonique de $U(\mathfrak{h})$ dans $U(\mathfrak{g})$ qui prolonge l'injection $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme de $U(\mathfrak{h})$ sur la sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathfrak{h}$.

(b) Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.
Le produit $U(\mathfrak{a}) \otimes_{\mathbb{K}} U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire 2

On note : $\operatorname{gr}(U(\mathfrak{g})) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} U_{(n)}(\mathfrak{g})/U_{(n-1)}(\mathfrak{g})$, où $U_{(n)}(\mathfrak{g})$ est l'image de $\bigoplus_{0\leq k\leq n} T^k(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})$.
On munit $\operatorname{gr}(U(\mathfrak{g}))$ d'une structure d'algèbre : $\dot{\hat{u}}\dot{\hat{v}} := \dot{\widehat{uv}}$ pour $u \in U_{(p)}(\mathfrak{g})$ et $v \in U_{(q)}(\mathfrak{g})$.

(a) Les projections $T^n(\mathfrak{g}) \to U_{(n)}(\mathfrak{g})/U_{(n-1)}(\mathfrak{g})$ avec $n \geq 1$ fournissent une application linéaire de $T(\mathfrak{g})$ dans $\operatorname{gr}(U(\mathfrak{g}))$ qui passe au quotient en un isomorphisme d'algèbres $S(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}(U(\mathfrak{g}))$.

(b) L'application linéaire $\operatorname{sym}\colon S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ définie par $\operatorname{sym}(X_1\bullet\ldots\bullet X_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} X_{\sigma(1)}\bullet\ldots\bullet X_{\sigma(n)}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules. De plus : $U_{(n)}(\mathfrak{g}) = U_{(n-1)}(\mathfrak{g}) \oplus \operatorname{sym}(S^n(\mathfrak{g}))$ quand $n \geq 1$.

Centre de l'algèbre enveloppante

On suppose que $\mathfrak{g}$ est de dimension finie.
On note : $j_{\mathfrak{g}}(X) = \det\left(\frac{e^{\frac{\operatorname{ad} X}{2}} - e^{-\frac{\operatorname{ad} X}{2}}}{\operatorname{ad} X}\right)$ pour $X \in \mathfrak{g}$. $\leftarrow \left[\text{précision : } \frac{e^{\frac{\operatorname{ad} X}{2}} - e^{-\frac{\operatorname{ad} X}{2}}}{\operatorname{ad} X} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{\operatorname{ad} X}{2})^{2n}}{(2n+1)!}\right]$

Théorème (isomorphisme de Duflo, version algébrique)

Le développement de Taylor $\widetilde{j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}}} \in S[[\mathfrak{g}^*]]$ de $j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}}$ en 0 définit un opérateur différentiel $\partial_{j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}}}$ sur l'ensemble $S(\mathfrak{g})$ des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$. On note $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments de $S(\mathfrak{g})$ annulés par $\mathfrak{g}$.
L'application $\begin{array}{rcl} S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} & \to & \operatorname{Z}(U(\mathfrak{g})) \\ P & \mapsto & \operatorname{sym}\big(\partial_{j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}}} P\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'algèbres.

Théorème (isomorphisme de Duflo, version analytique)

On suppose que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie réel simplement connexe $\widetilde{G}$.

(a) On pose : $\mathcal{V}_0 = \{X\in\mathfrak{g} \mid \forall\lambda \text{ valeur propre de } \operatorname{ad} X \ \ |\operatorname{Im}\lambda| < \pi\}$ et $\mathcal{W}_0 = \exp\mathcal{V}_0$.
L'application exponentielle est un difféomorphisme de l'ouvert $\mathcal{V}_0$ de $\mathfrak{g}$ sur l'ouvert $\mathcal{W}_0$ de $\widetilde{G}$. De plus, l'application $j_{\mathfrak{g}}$ est analytique sur $\mathfrak{g}$ et vérifie $j_{\mathfrak{g}}(X) > 0$ pour tout $X \in \mathcal{V}_0$.

(b) On identifie $U(\mathfrak{g}_C)$ avec $(T_1^{(\infty)}\widetilde{G})_{\mathbb{C}}$ et de même $S(\mathfrak{g}_C) = U((\operatorname{Lie}(\mathfrak{g},+))_{\mathbb{C}})$ avec $(T_1^{(\infty)}\mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$.
L'isomorphisme de Duflo pour $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ s'écrit aussi $\begin{array}{rcl} S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{g}} & \to & \operatorname{Z}(U(\mathfrak{g}_C)) \\ S & \mapsto & \exp(j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}} S) \end{array}$. (*)

Théorème (théorème de restriction de Chevalley et isomorphisme d'Harish-Chandra)

On suppose que $\mathfrak{g}$ est semi-simple complexe.
On fixe $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$ et un système de racines positives $R^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

(a) On note $S(\mathfrak{h})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ l'ensemble des éléments de $S(\mathfrak{h})$ invariants par $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.
On injecte $\mathfrak{h}^*$ dans $\mathfrak{g}^*$ en prolongeant $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ par 0 sur $\sum_{\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \mathfrak{g}^\alpha$
Le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\begin{array}{rcl} \operatorname{res}_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}\colon S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} & \to & S(\mathfrak{h})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \\ P & \mapsto & P_{|\mathfrak{h}^*} \end{array}$ est bijectif.

(b) L'application $\begin{array}{rcl} \mu_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}\colon \operatorname{Z}(U(\mathfrak{g})) & \to & S(\mathfrak{h})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \\ z & \mapsto & P \end{array}$, où $P(\lambda) = Q(\lambda - \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha)$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ avec $Q \in S(\mathfrak{h}) = U(\mathfrak{h})$ déterminé par $z \in Q + \sum_{\alpha>0} U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{g}^\alpha$, est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres unifères.

(c) La réciproque de l'isomorphisme de Duflo pour $\mathfrak{g}$ est $\lambda_{\mathfrak{g}}\colon \operatorname{Z}(U(\mathfrak{g})) \underset{\mu_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}}{\overset{\text{H.-C.}}{\xrightarrow{\sim}}} S(\mathfrak{h})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \underset{\operatorname{res}_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}}{\overset{\text{Chevalley}}{\xleftarrow{\sim}}} S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

(*) La distribution $T := \exp(j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}} S)$ vérifie : $\int_{\mathcal{W}_0} \varphi(x)\,\mathrm{d}T(x) = \int_{\mathcal{V}_0} \varphi(\exp X)\, j_{\mathfrak{g}}(X)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}S(X)$ pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{W}_0)$.