Algèbres tensorielle, symétrique et extérieure : à retenir (J-Y D)

On se donne un anneau commutatif k.

Définition-Proposition

(a) Une *k-algèbre* est un k-module A muni d'une application k-bilinéaire $\begin{array}{rl}\pi\colon A\times A \to & A\,.\\ (x,y)\mapsto & xy\end{array}$

(b) On dit qu'une k-algèbre A est *commutative* (resp. *associative*, *unifère*) si la loi $(x,y)\mapsto xy$ est commutative (resp. associative, avec élément neutre).

Par exemple, pour tout k-module M, le k-module $\mathrm{Hom}_k(M,M)$ muni de la composition est une k-algèbre associative unifère.

(c) Une *sous-algèbre* d'une algèbre A comme au (a) est un sous-module B de A tel que $xy\in B$ pour tous $x,y\in B$.

Définition-Proposition

Soient A et A' des k-algèbres.

(a) Un *idéal bilatère* de l'algèbre A est un sous-module $\mathscr{I}$ de A vérifiant :

$$xy\in\mathscr{I} \ \text{ et } \ yx\in\mathscr{I} \ \text{ pour tous } x\in A \text{ et } y\in\mathscr{I}.$$

Dans ce cas, le k-module $A/\mathscr{I}$ a une structure de k-algèbre avec la loi suivante :
$uv:=\dot{\widehat{xy}}$ pour $u,v\in A/\mathscr{I}$ indépendamment du choix de $x,y\in A$ tels que $u=\dot{x}$ et $v=\dot{y}$.

(b) Un *morphisme* de k-algèbres de A dans A' est une application k-linéaire f de A dans A' vérifiant : $f(xy)=f(x)f(y)$ pour tous $x,y\in A$.

Dans ce cas, on a : $\mathrm{Ker}\,f$ est un idéal bilatère de A, $\mathrm{Im}\,f$ est un sous-anneau de A', et la bijection canonique $\tilde{f}\colon A/\mathrm{Ker}\,f\to\mathrm{Im}\,f$ est un morphisme d'algèbres.

(c) On suppose ici que A et A' sont unifères d'éléments neutres 1_A et $1_{A'}$ pour le produit.

On dit qu'un morphisme de k-algèbres $f\colon A\to A'$ est *unifère* si $f(1_A)=1_{A'}$.

Définition-Proposition

Soient M et N des k-modules.

(a) On pose $T^0(M)=k$, $T^1(M)=M$ et $T^n(M)=\overbrace{M\otimes_k\cdots\otimes_k M}^{n\text{ termes}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

On appelle *algèbre tensorielle de M* le k-module $T(M):=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}T^n(M)$ muni de la structure de k-algèbre associative unifère d'élément unité 1_k dont le produit $\otimes$ est déterminé par les relations

$$(x_1\otimes\cdots\otimes x_p)\otimes(x_{p+1}\otimes\cdots\otimes x_q)=x_1\otimes\cdots\otimes x_q$$

pour $0<p<q$ et $x_1,\dots,x_q\in M$.

(b) L'injection $i\colon M\hookrightarrow T(M)$ est k-linéaire.

Pour toute application k-linéaire f de M dans une k-algèbre associative unifère A, il existe un unique morphisme de k-algèbres unifère $\overline{f}\colon T(M)\to A$ tel que
$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & T(M) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$
commute.

(c) Soit $u\colon M\to N$ une application k-linéaire.

Il existe un unique morphisme de k-algèbres unifère $T(u)\colon T(M)\to T(N)$ tel que :

$$T(u)(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=u(x_1)\otimes\cdots\otimes u(x_n) \ \text{ pour } n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \text{ et } x_1,\dots,x_n\in M.$$

(d) On suppose que le k-module M a une base $(e_i)_{i\in I}$.

Dans ce cas, le k-module $T(M)$ admet pour base $(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n})_{n\in\mathbb{N}\text{ et }(i_1,\dots,i_n)\in I^n}$, où $e_\emptyset=1_k$.

Définition-Proposition

Soient M et N des k-modules.

(a) On note $\mathscr{I}$ l'idéal de $T(M)$ engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$ avec $x, y \in M$.
On appelle *algèbre symétrique de* M la k-algèbre associative unifère quotient $S(M) := T(M)/\mathscr{I}$.
Son produit $\bullet$ est commutatif : $x \bullet y = y \bullet x$ pour tous $x, y \in S(M)$.

(b) On a : $\mathscr{I} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\mathscr{I} \cap T^n(M))$ donc $S(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (T^n(M) + \mathscr{I})/\mathscr{I}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S^n(M)$, où on pose $S^0(M) = k$, $S^1(M) = M$ et $S^n(M) = T^n(M)/(\mathscr{I} \cap T^n(M))$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(c) L'injection $i\colon M \hookrightarrow S(M)$ est k-linéaire telle que $i(x) \bullet i(y) = i(y) \bullet i(x)$ pour $x, y \in M$.
Pour toute application k-linéaire f de M dans une k-algèbre associative unifère A qui vérifie $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ pour tous $x, y \in M$, il existe un unique morphisme de k-algèbres unifère $\overline{f}\colon S(M) \to A$ tel que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & S(M) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

(c) Soit $u\colon M \to N$ une application k-linéaire.
Il existe un unique morphisme de k-algèbres unifère $S(u)\colon S(M) \to S(N)$ tel que :

$$S(u)(x_1 \bullet \cdots \bullet x_n) = u(x_1) \bullet \cdots \bullet u(x_n) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ et } x_1, ..., x_n \in M.$$

(d) On suppose que le k-module M a une base $(e_i)_{i\in I}$ avec I totalement ordonné.
Dans ce cas, le k-module $S(M)$ admet pour base la famille formée des $e_{i_1}^{\alpha_1} \bullet \cdots \bullet e_{i_n}^{\alpha_n}$ quand $n \in \mathbb{N}$ et $(i_1, ..., i_n) \in I^n$ vérifient $i_1 < \cdots < i_n$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$, où $e_\emptyset = 1_k$.

En particulier, quand I s'écrit $\{1, ..., n\}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la k-algèbre $S(M)$ est isomorphe à la k-algèbre $k[X_1, ..., X_n]$ par prolongement de l'application k-linéaire $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$.

Définition-Proposition

Soient M et N des k-modules.

(a) On note $\mathscr{J}$ l'idéal de $T(M)$ engendré par les éléments $x \otimes x$ avec $x \in M$.
On appelle *algèbre extérieure de* M la k-algèbre associative unifère quotient $\Lambda(M) := T(M)/\mathscr{J}$.
Son produit $\wedge$ est anticommutatif : $x \wedge y = (-1)^{pq}\, y \wedge x$ pour tous $x \in \Lambda^p(M)$ et $y \in \Lambda^q(M)$.

(b) On a : $\mathscr{J} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\mathscr{J} \cap T^n(M))$ donc $\Lambda(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (T^n(M) + \mathscr{J})/\mathscr{J}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Lambda^n(M)$, où on pose $\Lambda^0(M) = k$, $\Lambda^1(M) = M$ et $\Lambda^n(M) = T^n(M)/(\mathscr{J} \cap T^n(M))$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(c) L'injection $i\colon M \hookrightarrow \Lambda(M)$ est k-linéaire telle que $i(x) \wedge i(x) = 0$ pour $x \in M$.
Pour toute application k-linéaire f de M dans une k-algèbre associative unifère A qui vérifie $f(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in M$, il existe un unique morphisme de k-algèbres unifère $\overline{f}\colon \Lambda(M) \to A$ tel que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & \Lambda(M) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

(c) Soit $u\colon M \to N$ une application k-linéaire.
Il existe un unique morphisme de k-algèbres unifère $\Lambda(u)\colon \Lambda(M) \to \Lambda(N)$ tel que :

$$\Lambda(u)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = u(x_1) \wedge \cdots \wedge u(x_n) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ et } x_1, ..., x_n \in M.$$

(d) On suppose que le k-module M a une base $(e_i)_{i\in I}$ avec I totalement ordonné.
Dans ce cas, le k-module $\Lambda(M)$ admet pour base la famille formée des $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ quand $n \in \mathbb{N}$ et $(i_1, ..., i_n) \in I^n$ vérifient $i_1 < \cdots < i_n$, où $e_\emptyset = 1_k$.