Algèbres de Lie réelles et complexes : à retenir (J-Y D)

On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

(a) Une $\mathbb{K}$-*algèbre de Lie* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application $\mathbb{K}$-bilinéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire une $\mathbb{K}$-algèbre), notée $(X, Y) \mapsto [X, Y]$, telle que :

$$\begin{cases} [Y, X] = -[X, Y] \text{ pour tous } X, Y \in \mathfrak{g} \quad \text{« antisymétrie » ;} \\ [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \text{ pour tous } X, Y, Z \in \mathfrak{g} \quad \text{« identité de Jacobi ».} \end{cases}$$

Dans ce cas, on pose $\boxed{(\mathrm{ad}(X))(Y) := [X, Y]}$ pour $X, Y \in \mathfrak{g}$.

(b) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. Une *dérivation de* A est une application linéaire $d \in \mathscr{L}(A)$ telle que :

$$d(xy) = (dx)\, y + x\, d(y) \text{ pour tous } x, y \in A.$$

L'identité de Jacobi du (a) signifie que $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ pour $X \in \mathfrak{g}$ « dérivations intérieures ».

(c) Une *sous-algèbre de Lie* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que :

$$[X, Y] \in \mathfrak{h} \text{ pour tous } X, Y \in \mathfrak{h}.$$

Définition-Proposition

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ des $\mathbb{K}$-algèbres de Lie.

(a) Soit $P \subseteq \mathfrak{g}$. La *sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$ *engendrée par* P est la plus petite sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant P (intersection des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant P).

(b) Un *idéal* de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant :

$$[X, Y] \in \mathfrak{a} \text{ pour tous } X \in \mathfrak{g} \text{ et } Y \in \mathfrak{a}.$$

Dans ce cas, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ a une structure de $\mathbb{K}$-algèbre de Lie avec la loi suivante : $[U, V] := \dot{\widehat{[X, Y]}}$ pour $U, V \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ indépendamment du choix de $X, Y \in \mathfrak{g}$ tels que $U = \dot{X}$ et $V = \dot{Y}$.

(c) Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des idéaux de $\mathfrak{g}$. On note : $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] := \mathrm{Vect}([X, Y])_{X \in \mathfrak{a} \text{ et } Y \in \mathfrak{b}}$.
L'ensemble $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. En particulier, $\mathrm{D}(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

(d) Un *morphisme* (resp. *isomorphisme*) *de* $\mathbb{K}$-*algèbres de Lie* de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ est une application (resp. bijection) linéaire f de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ vérifiant : $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Dans ce cas, on a : $\operatorname{Ker} f$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, $\operatorname{Im} f$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}'$, et la bijection canonique $\tilde{f} \colon \mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Exemples

(a) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre associative, de produit noté « . ».
On pose : $[x, y] = x.y - y.x$ pour tous $x, y \in A$.

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni de $[\ ,\ ]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie.

ainsi $(a_{i,j}) \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K}) \longmapsto (f \colon e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} e_i a_{i,j}) \in \mathscr{L}(V)$ $\overbrace{\text{est}}$ isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres

(b) Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}$. ← [ou un $\mathbb{H}$-espace vectoriel à droite de dimension finie]

D'après (a), $\mathscr{L}(V)$ et $\mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ ont des structures de $\mathbb{K}$-algèbre de Lie ← [réelles pour V sur $\mathbb{H}$]
Afin d'indiquer qu'on utilise le crochet, on notera plutôt $\mathfrak{gl}(V)$ et $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ ces algèbres de Lie.

(b) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. L'ensemble $\mathrm{Der}(A)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$.

(d) Soit I un ensemble. Pour $i \in I$, on pose : $X_i = i$ (« indéterminée d'indice i »).

On note $L((X_i)_{i \in I})$ la sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $T(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} X_i)$ (muni de son crochet d'algèbre associative) engendrée par $(X_i)_{i \in I}$.

Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et toute famille $(X'_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathfrak{g}$ indexée par I, il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie $f \colon L((X_i)_{i \in I}) \to \mathfrak{g}$ tel que $f(X_i) = X'_i$ pour tout $i \in I$.

Définition-Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie..

(a) On dit que $\mathfrak{g}$ est *commutative* si $[X,Y]=0$ pour tous $X,Y\in\mathfrak{g}$. ← [c'est-à-dire $[X,Y]=[Y,X]$ pour $X,Y\in\mathfrak{g}$]

On note : $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) := \{X\in\mathfrak{g} \mid \forall Y\in\mathfrak{g} \quad [X,Y]=0\}$ « centre de $\mathfrak{g}$ ».

(a) On pose : $C^0\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$ et $C^n\mathfrak{g}=[C^{n-1}\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ pour $n\geq 1$.

On dit que $\mathfrak{g}$ est *nilpotente* s'il existe $r\in\mathbb{N}$ tel que $C^r\mathfrak{g}=\{0\}$. ← [par exemple $\mathfrak{g}$ commutative]

Dans ce cas, lorsque $\mathfrak{g}\neq\{0\}$, on a : $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})\neq\{0\}$ ← [$C^{r-1}\mathfrak{g}\subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ où r est minimal tel que $C^r\mathfrak{g}=\{0\}$]

Une sous-algèbre, un quotient, d'une algèbre de Lie nilpotente, sont nilpotentes.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet un plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$. ← [si $\mathfrak{g}$ est le groupe affine de $\mathbb{K}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ est commutatif non-nul]

(b) On pose : $D^0\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$ et $D^n\mathfrak{g}=[D^{n-1}\mathfrak{g},D^{n-1}\mathfrak{g}]$ pour $n\geq 1$.

On dit que $\mathfrak{g}$ est *résoluble* s'il existe $r\in\mathbb{N}$ tel que $D^r\mathfrak{g}=\{0\}$. ← [par exemple $\mathfrak{g}$ nilpotente]

Une sous-algèbre, un quotient, d'une algèbre de Lie résoluble, sont résolubles.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet un plus grand idéal résoluble $\mathfrak{r}$ « radical de $\mathfrak{g}$ ». ← [le radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est nul]

Théorèmes

Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie et M un $\overbrace{\mathfrak{g}\text{-module}}^{\text{représentation } \rho}$ de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

(a) Si les éléments de $\rho(\mathfrak{g})$ sont nilpotents, alors l'espace vectoriel M a une base $\mathscr{B}$ telle que les $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}\,\rho(X)$, $X\in\mathfrak{g}$, sont triangulaires supérieures avec des 0 sur la diagonale « théorème d'Engel ».

(b) Il existe $n\in\mathbb{N}$ et un morphisme d'algèbres de Lie injectif $\pi\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ qui envoie le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ dans un ensemble de matrices nilpotentes « théorème d'Ado ».

(c) On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Si l'algèbre de Lie $\rho(\mathfrak{g})$ est résoluble, alors l'espace vectoriel M a une base $\mathscr{B}$ telle que les $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}\,\rho(X)$, $X\in\mathfrak{g}$, sont triangulaires supérieures « théorème de Lie ».

(d) L'algèbre de Lie $\rho(\mathfrak{g})$ est résoluble si et seulement si $\mathrm{tr}(\rho(X)\rho(Y))=0$ pour tous $X\in\mathfrak{g}$ et $Y\in\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ « critère de Cartan ».

Définition-Proposition

Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie et B une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$.

(a) On dit que $\mathfrak{g}$ est *simple* si $\mathfrak{g}$ n'est pas commutative et tout idéal non-nul de $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{g}$.

(b) On dit que $\mathfrak{g}$ est *semi-simple* si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal commutatif non-nul.

Un <u>idéal</u>, un quotient, d'une algèbre de Lie semi-simple, sont semi-simples. ← [pas une sous-algèbre !!!]

(c) On dit que $\mathfrak{g}$ est *réductive* s'il existe un idéal semi-simple $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ et un idéal commutatif $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{z}$.

(d) On dit que B est $\mathfrak{g}$-*invariante* si : $B([X,Y],Z)=B(X,[Y,Z])$ pour tous $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$.

(e) On pose $K_{\mathfrak{g}}(X,Y)=\mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y)\big)$ pour tous $X,Y\in\mathfrak{g}$ « forme de Killing de $\mathfrak{g}$ ».

La forme bilinéaire symétrique $K_{\mathfrak{g}}$ est $\mathfrak{g}$-invariante.

(f) On a : $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si $K_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée « critère de Cartan-Killing ».

(g) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux simples.

Ainsi, lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, on a : $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})=\{0\}$ et $\mathrm{D}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$.

Exemples

On se donne $n\in\mathbb{N}$.

(a) On pose : $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}\,X=0\}$.

On a : $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ qui est simple.

(b) On a : $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ est somme directe de ses idéaux $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}I$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ est donc réductive.