Analyse sur les variétés : à retenir (J-Y D)

Fibrés vectoriels

Soient X et Y des variétés lisses de dimensions m et n, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

(a) On appelle *fibré vectoriel sur X, de rang p sur* $\mathbb{K}$ une application π de classe C^∞ d'une variété lisse E dans X telle que :
– pour tout $x \in X$, la « fibre » $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p ;
– pour tout $a \in X$, il existe un ouvert U de X contenant a et un difféomorphisme Φ de $E|_U := \pi^{-1}(U)$ sur $U \times \mathbb{K}^p$ qui s'écrit $v \in E_x \mapsto (x, \Phi_x(v))$ où les applications Φ_x sont linéaires.

Dans ce cas, on appelle « carte vectorielle de E en a » un couple $(E|_U, \Phi)$ comme ci-dessus, et on identifie X à la sous-variété $\{0_{E_x}\}_{x \in X}$ de E.

(b) Un morphisme de fibrés vectoriels d'un fibré vectoriel E sur X dans un fibré vectoriel F sur Y est une application $f \colon E \to F$ de classe C^∞ telle que $f(X) \subseteq Y$ et f s'écrit sous la forme $v \in E_x \mapsto f_x(v) \in F_{f(x)}$ avec $f_x \colon E_x \to F_{f(x)}$ linéaire.

Exemples

(a) La variété lisse $\mathbb{C}_X := X \times \mathbb{C}$ est un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur X avec la carte vectorielle $\mathrm{id}_{\mathbb{C}_X}$.

(b) La variété lisse TX est un fibré vectoriel réel de rang m sur X avec les cartes vectorielles $\Phi \colon \begin{array}{rcl} TX|_U & \to & U \times \mathbb{R}^m \\ (x,v) & \mapsto & (x, (\mathrm{d}_x x_1 \cdot v, ..., \mathrm{d}_x x_m \cdot v)) \end{array}$ déduites des cartes $(U, (x_1, ..., x_m))$ de X.

Définition

Soit E un fibré vectoriel réel ou complexe de rang p sur X.

(a) On appelle *section de* E une application $v \colon X \to E$ telle que $v(x) \in E_x$ pour tout $x \in X$.
Dans ce cas, lorsque v est continue, *le support de* v est $\operatorname{Supp} v := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid v(x) \neq 0\}}$.

On écrira $\underset{/\Phi}{v}\left|\begin{array}{l} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{array}\right.$ relativement à une carte vectorielle $(E|_U, \Phi)$ de E pour traduire les égalités :
$$\Phi_x(v(x)) = (v_1(x), ..., v_p(x)), \ \ x \in U.$$

(b) On note $\Gamma^\infty(E)$ (resp. $\Gamma^\infty_c(E)$) l'espace vectoriel formé des sections de classe C^∞ (resp. de classe C^∞ à support compact) de E.

Exemples

(a) L'application $\begin{array}{rcl} \mathscr{C}^\infty(X) & \to & \Gamma^\infty(\mathbb{C}_X) \\ s & \mapsto & v \end{array}$ avec $v(x) = (x, s(x))$ pour $x \in X$, est linéaire bijective.

(b) L'espace vectoriel $\Gamma^\infty(TX)$ est l'ensemble des champs de vecteurs sur X.

Proposition

Soient E et F des fibrés vectoriels sur X, de rangs p et q relativement à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) L'ensemble $\check{E} := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times {E_x}^*$ a une unique structure de fibré vectoriel de rang p sur X pour les cartes vectorielles $\begin{array}{rcl} {}^t\Phi^{-1} \colon \check{E}|_U & \to & U \times (\mathbb{K}^p)^* \\ (x, v^*) & \mapsto & (x, {}^t\Phi_x^{-1}(v^*)) \end{array}$ déduites des cartes vectorielles $(E|_U, \Phi)$ de E.

(b) L'ensemble $E \otimes_{\mathbb{K}} F := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times (E_x \otimes_{\mathbb{K}} F_x)$ a une unique structure de fibré vectoriel de rang pq sur X pour les cartes vectorielles $\begin{array}{rcl} (E \otimes_{\mathbb{K}} F)|_U & \to & U \times (\mathbb{K}^p \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^q) \\ (x, v \otimes w) & \mapsto & (x, \Phi_x(v) \otimes \Psi_x(w)) \end{array}$ déduites des cartes vectorielles $(E|_U, \Phi)$ de E et $(F|_U, \Psi)$ de F.

Intégration sur une variété

Soient X une variété lisse de dimension m et $p \geq 1$.

Proposition

(a) On pose pour tout $x \in X$:
$$|\Lambda|_{1/p}(X)_x := \big\{\rho\colon (\Lambda^m(T_xX)_{\mathbb{C}})\backslash\{0\} \to \mathbb{C} \mid \forall\omega \in (\Lambda^m(T_xX)_{\mathbb{C}})\backslash\{0\}\ \forall\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\ \rho(\lambda\omega) = |\lambda|^{1/p}\rho(\omega)\big\}.$$

(b) L'ensemble $|\Lambda|_{1/p}(X) := \bigcup_{x\in X} \{x\} \times |\Lambda|_{1/p}(X)_x$ a une unique structure de fibré vectoriel complexe de rang 1 sur X pour les cartes vectorielles $\Phi\colon \begin{array}{ccc} |\Lambda|_{1/p}(X)|_U & \longrightarrow & U \times \mathbb{C} \\ (x,\rho) & \longmapsto & \big(x, \rho\big((\frac{\partial}{\partial x_1})_x \wedge \dots \wedge (\frac{\partial}{\partial x_m})_x\big)\big) \end{array}$ déduites des cartes $(U, (x_1, ..., x_m))$ de X. $\leftarrow$ [donc $\Phi_x(\rho) = a$ où $a \in \mathbb{C}$ vérifie $\rho = a\,|\mathrm{d}_x x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}_x x_m|$]

(c) On pose $|\Lambda|(X) = |\Lambda|_1(X)$.

Définition

(a) On appelle *densité* (resp. *demi-densité*) sur X une section de $|\Lambda|(X)$ (resp. $|\Lambda|_{1/2}(X)$). On dit qu'une telle densité (resp. demi-densité) ρ sur X est mesurable, ou réelle, ou positive, ou C^∞, si dans les cartes chaque $x \mapsto \rho\big((\frac{\partial}{\partial x_1})_x \wedge \cdots \wedge (\frac{\partial}{\partial x_m})_x\big)$ est mesurable, ou réelle, ou positive, ou C^∞.

(b) Soit ρ une densité mesurable positive sur X. On définit, indépendamment des choix d'un atlas $((U_i, \varphi = (x_{1,i}, ..., x_{m,i})))_{i\in I}$ de X et d'une partition de l'unité $(u_i)_{i\in I}$ subordonnée à $(U_i)_{i\in I}$:
$$\int_X \rho := \sum_{i\in I} \int_{\varphi_i(U_i)} \widetilde{u}_i(x_1, ..., x_m)\, a_i(x_1, ..., x_m)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m.$$
en posant $u_i(x) = \widetilde{u}_i(x_{1,i}, ..., x_{m,i})$ et $\rho(x) = a_i(x_{1,i}, ..., x_{m,i})\, |\mathrm{d}_x x_{1,i} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}_x x_{m,i}|$ quand $x \in U_i$. Donc $\int_X \rho = \int_X \mathrm{d}\mu$, où μ est la mesure positive sur X d'images $a_i(x_1, ..., x_m)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_m$ par les cartes.

Proposition

(a) On note : $L^1(|X|) := \big\{\rho \text{ densité mesurable sur } X \mid \int_X |\rho| < +\infty\big\}/_{(\text{égalité presque partout dans les cartes})}$ et $L^2(|X|) := \big\{\rho \text{ demi-densité mesurable sur } X \mid \int_X |\rho|^2 < +\infty\big\}/_{(\text{égalité presque partout dans les cartes})}$.

Pour tout $\rho \in L^1(|X|)$, on pose : $\int_X \rho := \int_X (\mathrm{Re}\,\rho)_+ - \int_X (\mathrm{Re}\,\rho)_- + \mathrm{i}(\int_X (\mathrm{Im}\,\rho)_+ - \int_X (\mathrm{Im}\,\rho)_-)$.

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^1(|X|)$ muni de $\|\rho\|_1 := \int_X |\rho|$ est un un espace de Banach et le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^2(|X|)$ muni de $\|\rho\|_2 := \big(\int_X |\rho|^2\big)^{1/2}$ est un espace de Hilbert.

(b) On note $L^{1_{loc}}(|X|)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des densités mesurables sur X qui sont localement intégrables dans les cartes, quotienté par l'égalité presque partout dans les cartes.

Donc $L^1(|X|) \subseteq L^{1_{loc}}(|X|)$ et $L^2(|X|) \subseteq L^{1_{loc}}(|X|)$. De plus l'application $\rho \mapsto (f \mapsto \int_X f\rho)$ identifie $L^{1_{loc}}(|X|)$ à un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des mesures de Radon sur X.

Exemples

(a) On se donne une section $x \mapsto \langle\ ,\ \rangle_x$ de classe C^∞ du fibré vectoriel $(TX \otimes_{\mathbb{R}} TX)\check{}$ sur X telle que les applications $\langle\ ,\ \rangle_x$ sont des produits scalaires (« structure de variété riemannièene sur X »).

Dans ce cas, on dispose d'une densité « canonique » ρ_X de classe C^∞ sur X déterminée par :
$$\rho_{X\,|U} = \sqrt{\det\big(\langle \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\rangle\big)_{1\leq i,j\leq m}}\ |\mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_m| \quad \text{pour toute carte } (U, (x_1, ..., x_m)) \text{ de } X.$$

(b) On considère un groupe de Lie réel G de dimension m, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
On fixe une base $(X_1, ..., X_m)$ de $\mathfrak{g}$, et note $(X_1^*, ..., X_m^*)$ sa base duale.

On définit deux densités positives d_G de $\breve{\mathrm{d}}_G$ de classe C^∞ sur G par :
$$\mathrm{d}_G(g) := |(g\,\cdot)_* X_1^* \wedge \dots \wedge (g\,\cdot)_* X_m^*| \quad \text{et} \quad \breve{\mathrm{d}}_G(g) := |(\cdot\, g)_* X_1^* \wedge \dots \wedge (\cdot\, g)_* X_m^*| \quad \text{pour } g \in G.$$

Ainsi d_G (resp. $\breve{\mathrm{d}}_G$) est, à un scalaire > 0 près, l'unique densité positive non-nulle invariante par les translations à gauche (resp. à droite) sur G. De plus : $\breve{\mathrm{d}}_G(g) = |\det(\mathrm{Ad}\, g)|\, \mathrm{d}_G(g)$ pour $g \in G$.

(c) Quand $X = G = \mathbb{R}^m$ et $(X_1, ..., X_m)$ est la base canonique, on obtient dans (a) et (b) :
$$\rho_{\mathbb{R}^m} = \mathrm{d}_{\mathbb{R}^m} = \breve{\mathrm{d}}_{\mathbb{R}^m} = |\mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_m|.$$

Opérateurs différentiels

Soient X et Y des variétés lisses de dimensions m et n.
On considère des fibrés vectoriels complexes E et F de rangs p et q sur X.

Définition-Proposition

On note $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ puis $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$ pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$.

(a) On appelle *opérateur différentiel de E dans F* une application linéaire $D\colon \Gamma^\infty(E) \to \Gamma^\infty(F)$ qui vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

(i) pour tout $a \in X$, il existe une carte $(U, (x_1, ..., x_m))$ de X en a, des cartes vectorielles $(E|_U, \Phi)$ et $(F|_U, \Psi)$ de E et F au-dessus de U, $k \in \mathbb{N}$, et $D_\alpha\colon U \to \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ $(|\alpha| \leq k)$ de classe C^∞, tels que

$$D\colon \underset{/\Phi}{v}\left|\begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{matrix}\right. \mapsto \underset{/\Psi}{w}\left|\begin{matrix} w_1 \\ \vdots \\ w_q \end{matrix}\right. \quad \text{avec} \quad (w_j)_{1 \leq j \leq q} = \sum_{|\alpha| \leq k} D_\alpha \Big(\frac{\partial^{|\alpha|} v_i}{\partial x^\alpha} \Big)_{1 \leq i \leq p} ;$$

(ii) $\mathrm{Supp}(Dv) \subseteq \mathrm{Supp}\, v$ pour tout $v \in \Gamma^\infty(E)$. ← [donc une composée d'opérateurs différentiels est un opérateur différentiel]

(b) On appelle *opérateur différentiel sur X* un opérateur différentiel de $\mathbb{C}_X$ dans $\mathbb{C}_X$, c'est-à-dire une application $D\colon \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathscr{C}^\infty(X)$ telle que pour tout $a \in X$, il existe une carte $(U, (x_1, ..., x_m))$ de X en a, $k \in \mathbb{N}$, et $a_\alpha \in \mathscr{C}^\infty(X)$ $(|\alpha| \leq k)$, pour lesquels

$$(Ds)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \, \frac{\partial^{|\alpha|} s}{\partial x^\alpha}(x) \quad \text{pour tous } s \in \mathscr{C}^\infty(X) \text{ et } x \in U.$$

Définition-Proposition

On se donne un opérateur différentiel D de E dans F.

(a) Il existe un unique opérateur différentiel ${}^tD$ de $\check{F} \otimes_{\mathbb{C}} |\Lambda|(X)$ dans $\check{E} \otimes_{\mathbb{C}} |\Lambda|(X)$ tel que :

$$\textstyle\int_X \langle Dv, \rho \rangle = \int_X \langle v, {}^tD\rho \rangle \quad \text{pour tous } v \in \Gamma_c^\infty(E) \text{ et } \rho \in \Gamma^\infty(\check{F} \otimes_{\mathbb{C}} |\Lambda|(X)).$$

En particulier, on a : ${}^t({}^tD) = D$ en identifiant $|\Lambda|(X)\check{} \otimes_{\mathbb{C}} |\Lambda|(X)$ à $\mathbb{C}$ via $f \otimes \rho \mapsto f(\rho)$.

(b) Quand des cartes $(U, (x_1, ..., x_m))$ de X, $(E|_U, \Phi)$ et $(F|_U, \Psi)$ de E et F, permettent d'écrire

$$D\colon \underset{/\Phi}{v}\left|\begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{matrix}\right. \mapsto \underset{/\Psi}{w}\left|\begin{matrix} w_1 \\ \vdots \\ w_q \end{matrix}\right. \quad \text{avec} \quad (w_j)_{1 \leq j \leq q} = \sum_{|\alpha| \leq k} D_\alpha \Big(\frac{\partial^{|\alpha|} v_i}{\partial x^\alpha} \Big)_{1 \leq i \leq p},$$

on a

$${}^tD\colon \Big(\underset{/{}^t\Psi^{-1}}{w^*}\left|\begin{matrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_q^* \end{matrix}\right. \Big) \otimes |\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_m| \mapsto \Big(\underset{/{}^t\Phi^{-1}}{v^*}\left|\begin{matrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_p^* \end{matrix}\right. \Big) \otimes |\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_m|$$

$$\text{avec} \quad (v_i^*)_{1 \leq i \leq p} = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \, ({}^tD_\alpha) \Big(\frac{\partial^{|\alpha|} w_j^*}{\partial x^\alpha} \Big)_{1 \leq j \leq q}.$$

Proposition

On note ici : $\mathrm{OpDiff}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs différentiels de E dans F.
On pose aussi : $\mathrm{OpDiff}(E) = \mathrm{OpDiff}(E, E)$ et $\mathrm{OpDiff}(X) = \mathrm{OpDiff}(\mathbb{C}_X)$.

(a) L'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(X) & \to & \mathrm{OpDiff}(E) \\ a & \mapsto & (s \mapsto as) \end{array}$ est linéaire.

(b) L'application $\begin{array}{ccc} \Gamma^\infty(TX) & \to & \mathrm{OpDiff}(X) \\ A & \mapsto & (s \mapsto A \cdot s) \end{array}$ est linéaire injective.

(c) Soient $f\colon X \to Y$ un isomorphisme de variétés et $D \in \mathrm{OpDiff}(X)$.
Il existe un unique $f_*D \in \mathrm{OpDiff}(Y)$ tel que :

$$(f_*D)(f_*s) = f_*(Ds) \quad \text{pour tout } s \in \mathscr{C}^\infty(X), \text{ en notant } f_*s := s \circ f^{-1}.$$

Distributions et convolution

Soient X et Y des variétés lisses de dimensions m et n.

Définition-Proposition

(a) Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{E}(X) := \mathscr{C}^\infty(X)$ (resp. $\mathscr{E}(|X|) := \Gamma^\infty(|\Lambda|(X))$) est muni de la structure d'espace vectoriel topologique métrisable complet définie par la famille de semi-normes φ (resp. ρ) $\mapsto \sup\limits_{|\alpha|\leq k} \sup\limits_{x\in K} \left|\frac{\partial^{|\alpha|}a(x)}{\partial x^\alpha}\right|$ avec $(U,(x_1,...,x_m))$ carte de X, K compact de U, $k\in\mathbb{N}$, où a est déterminée par l'égalité $\varphi(x) = a(x_1,...,x_m)$ (resp. $\rho(x) = a(x_1,...,x_m)\,|\mathrm{d}_x\, x_1\wedge...\wedge \mathrm{d}_x\, x_m|$), $x\in U$.

(b) Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{D}(X) := \mathscr{C}^\infty_c(X)$ (resp. $\mathscr{D}(|X|) := \Gamma^\infty_c(|\Lambda|(X))$) est muni de la structure d'espace vectoriel topologique séparé complet pour laquelle les voisinages de 0 sont les parties contenant un convexe C tel que pour tout compact K de X, l'intersection de C avec $\mathscr{D}_K(X) := \{\varphi\in\mathscr{D}(X) \mid \operatorname{Supp}\varphi\subseteq K\}$ (resp. $\mathscr{D}_K(|X|) := \{\rho\in\mathscr{D}(|X|) \mid \operatorname{Supp}\rho\subseteq K\}$) est un voisinage de 0 lorsqu'on munit $\mathscr{D}_K(X)$ (resp. $\mathscr{D}_K(|X|)$) de la topologie de $\mathscr{E}(X)$ (resp. $\mathscr{E}(|X|)$).

Définition-Proposition

(a) On note d'une part $\mathscr{D}'(X) := \mathscr{D}(X)'$ (ou $\mathscr{C}^{-\infty}(|X|)$) l'espace des « distributions sur X » et d'autre part $\mathscr{D}'(|X|) := \mathscr{D}(|X|)'$ (ou $\mathscr{C}^{-\infty}(X)$) l'espace des « fonctions généralisées sur X ».

Donc $\mathscr{D}'(X)$ est l'ensemble des applications linéaires $T\colon \mathscr{D}(X)\to\mathbb{C}$ telles que :

$T(\varphi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout compact K de X et toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 0 dans $\mathscr{D}_K(X)$.

(b) On dispose d'injections canoniques $\begin{array}{ccc} L^{1_{loc}}(|X|) & \to & \mathscr{D}'(X) \\ \rho & \mapsto & (\varphi\mapsto \int_X \varphi\rho) \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} L^{1_{loc}}(X) & \to & \mathscr{D}'(|X|) \\ f & \mapsto & (\rho\mapsto \int_X f\rho) \end{array}$.

Tout élément de $\mathscr{D}'(X)$ est limite pour la topologie faible d'une suite d'éléments de $\mathscr{D}(|X|)$.

Les mesures de Dirac sur X forment une partie totale de $\mathscr{D}'(X)$ pour la topologie faible.

(c) On note $\mathscr{E}'(X) := \mathscr{E}(X)'$ et $\mathscr{E}'(|X|) := \mathscr{E}(|X|)'$. Pour $T\in\mathscr{D}'(X)$ et $f\in\mathscr{D}'(|X|)$, on pose :
$\operatorname{Supp} T := \{x\in X \mid T_{|U}\neq 0$ pour tout ouvert U de X contenant $x\}$ « support de T »,
$\operatorname{Supp} f := \{x\in X \mid f_{|U}\neq 0$ pour tout ouvert U de X contenant $x\}$ « support de f ».

L'espace vectoriel $\mathscr{E}'(X)$ s'identifie par restriction à $\mathscr{D}'_c(X) := \{T\in\mathscr{D}'(X) \mid \operatorname{Supp} T \text{ compact}\}$ et l'espace vectoriel $\mathscr{E}'(|X|)$ s'identifie par restriction à $\mathscr{D}'_c(|X|) := \{f\in\mathscr{D}'(|X|) \mid \operatorname{Supp} f \text{ compact}\}$.

Proposition

(a) On se donne une application F de classe C^∞ de X dans Y.

On construit une application continue pour les topologies faibles F_* de l'ensemble des distributions T sur X telles que $F^{-1}(L)\cap\operatorname{Supp} T$ est compact pour tout compact L de Y, dans l'ensemble des distributions sur Y, en posant : $\langle F_*\,T,\psi\rangle = \langle T, F^*\,\psi\rangle$ pour tout $\psi\in\mathscr{D}(Y)$, où $F^*\,\psi := \psi\circ F$.

(b) On se donne un opérateur différentiel D de $|\Lambda|(X)$ dans $|\Lambda|(X)$.

L'application continue $D\colon \mathscr{D}(|X|)\to\mathscr{D}(|X|)$ se prolonge continûment pour les topologies faibles en $D\colon\mathscr{D}'(X)\to\mathscr{D}'(X)$ déterminée par :

$$\langle DT,\varphi\rangle = \langle T, {}^tD\varphi\rangle \quad \text{pour tous } T\in\mathscr{D}'(X) \text{ et } \varphi\in\mathscr{D}(X).$$

Proposition

On considère un groupe de Lie réel G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Une base de $\mathfrak{g}$ fournit d_G et $\breve{\mathrm{d}}_G$.

(a) Soient $S\in\mathscr{E}'(G)$ et $T\in\mathscr{D}'(G)$ (ou $S\in\mathscr{D}'(G)$ et $T\in\mathscr{E}'(G)$). On définit $S*T\in\mathscr{D}'(G)$ par :

$$\langle S*T,\varphi\rangle = \int_G \underbrace{\Big(\int_G \varphi(xy)\,\mathrm{d}S(x)\Big)}_{\mathrm{C}^\infty \text{ à support compact en } y}\mathrm{d}T(y) = \int_G \underbrace{\Big(\int_G \varphi(xy)\,\mathrm{d}T(y)\Big)}_{\mathrm{C}^\infty \text{ en } x}\mathrm{d}S(x) \ \text{ pour } \varphi\in\mathscr{D}(G).$$

On a : $\operatorname{Supp}(S*T)\subseteq\overline{\operatorname{Supp} S.\operatorname{Supp} T}$. De plus : $S*(T*U) = (S*T)*U$ quand $\overbrace{S,T,U}^{\text{deux dans } \mathscr{E}'(G)}\in\mathscr{D}'(G)$.

(b) Si $S = \varphi\,\breve{\mathrm{d}}_G$ avec φ C^∞, alors $S*T = (\varphi*T)\,\breve{\mathrm{d}}_G$ où $\varphi*T\colon x\mapsto\int_G\varphi(xy^{-1})\,\mathrm{d}T(y)$ est C^∞.
Si $T = \psi\,\mathrm{d}_G$ avec ψ C^∞, alors $S*T = (S*\psi)\,\mathrm{d}_G$ où $S*\psi\colon x\mapsto\int_G\psi(y^{-1}x)\,\mathrm{d}S(y)$ est C^∞.
Si $\varphi,\psi\in\mathscr{D}(G)$, alors $(\varphi\,\mathrm{d}_G)*(\psi\,\mathrm{d}_G) = (\varphi*\psi)\,\mathrm{d}_G$ où $\varphi*\psi\colon x\mapsto\int_G\varphi(y)\,\psi(y^{-1}x)\,\mathrm{d}_G(y)\in\mathscr{D}(G)$.

(c) Les morphisme d'algèbres unifères $\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[G] & \to & \mathscr{E}'(G) \\ g\in G & \mapsto & (\varphi\mapsto\varphi(g))\end{array}$ et $\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) & \to & \mathscr{E}'(G) \\ X\in\mathfrak{g} & \mapsto & (\varphi\mapsto \frac{\mathrm{d}\varphi(\exp(tX))}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0})\end{array}$ sont injectifs.