Classification des algèbres de Lie semi-simples réelles (J-Y D)

Références

• S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, prop. 2.2 p. 236, p. 441, prop. 1.4 p. 442, ex. 7 et 8 p. 531/585. Cote : 67 HEL 78 (version révisée 67 HEL 01).

• A. W. KNAPP *Lie groups beyond an introduction*, th. 6.74 p. 341, ex. 7 p. 367/556 pour la définition du diagramme de Satake. Cote : 25 KNA 96 (édition augmentée 25 KNA 02).

Passage aux formes réelles

Définition

Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie complexe. On note $\widetilde{\mathfrak{g}}|_{\mathbb{R}}$ sa structure d'algèbre de Lie réelle.

(a) On appelle *conjugaison de* $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une application $\sigma\colon \widetilde{\mathfrak{g}}\to\widetilde{\mathfrak{g}}$ telle que pour $X,Y\in\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$:
$\sigma(X+Y)=\sigma(X)+\sigma(Y)$, $\sigma(\lambda X)=\overline{\lambda}\,\sigma(X)$, $\sigma([X,Y])=[\sigma(X,\sigma(Y)]$, et $\sigma(\sigma(X))=X$.

(b) On appelle *involution d'une algèbre de Lie réelle ou complexe* $\mathfrak{g}'$ un automorphisme θ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ tel que $\theta^2=\mathrm{id}$.

(c) On appelle *forme réelle de* $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}|_{\mathbb{R}}$ telle que $\widetilde{\mathfrak{g}}|_{\mathbb{R}}=\mathfrak{g}\oplus \mathrm{i}\mathfrak{g}$, c'est-à-dire l'ensemble des points fixes d'une (unique) conjugaison σ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

(c) On suppose $\widetilde{\mathfrak{g}}$ semi-simple. On appelle *forme réelle déployée de* $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une forme réelle $\mathfrak{g}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ qui a une sous-algèbre de Cartan déployée. On appelle *forme réelle compacte de* $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une forme réelle $\mathfrak{g}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ qui est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie réel compact.

Proposition

(a) Soient $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{g}$ deux formes réelles d'une algèbre de Lie complexe $\widetilde{\mathfrak{g}}$, d'involutions τ et σ. On a : $\mathfrak{u}$ est stable par σ si et seulement si $\sigma\tau=\tau\sigma$, c'est-à-dire $\sigma\tau$ est une involution de $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

(b) Soit $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes d'algèbres de Lie complexes de dimension finie simples. Pour $\mathfrak{s}\in\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$, on fixe un ensemble $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ de représentants des classes d'isomorphisme des formes réelles de $\mathfrak{s}$.
Alors un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes d'algèbres de Lie réelles de dimension finie simples est : $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} := \underbrace{\{\,\widetilde{\mathfrak{s}}|_{\mathbb{R}}\}}_{\text{distincts}} \underset{\text{(union disjointe)}}{\cup} \Big(\underset{\substack{\mathfrak{s}\in\mathscr{S}_{\mathbb{C}}\\ \text{(union disjointe)}}}{\bigcup} \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})\Big)$.

Formes réelles et involutions

Proposition

Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie semi-simple.

(a) Soient $\widetilde{\mathfrak{h}}\in\operatorname{Car}\widetilde{\mathfrak{g}}$ et B une base de $R(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{h}})$. En particulier $(H_\alpha)_{\alpha\in B}$ est une base de $\widetilde{\mathfrak{h}}$.
Pour chaque $\alpha\in R(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{h}})$, on fixe $X_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}^\alpha\setminus\{0\}$. Pour $\alpha,\beta\in R(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{h}})$, on a :

$$[X_\alpha,X_\beta]=\begin{cases} N_{\alpha,\beta}\,X_{\alpha,\beta} & \text{si } \alpha+\beta\in R(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{h}}) \quad \text{pour un certain } N_{\alpha,\beta}\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \\ \text{ou} \quad 0 & \text{si } \alpha+\beta\notin R(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{h}}) \text{ et } \alpha+\beta\neq 0\end{cases}.$$

On peut choisir $(X_\alpha)_{\alpha\in R(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{h}})}$ satisfaisant la *normalisation de Chevalley* suivante :
$[X_\alpha,X_{-\alpha}]=H_\alpha$ pour $\alpha\in R(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{h}})$ et $N_{-\alpha,-\beta}=-N_{\alpha,\beta}$ lorsque $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in R(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{h}})$.

Dans ce cas : $\mathfrak{g}_d := \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\big((H_\alpha)_{\alpha\in B},(X_\alpha)_{\alpha\in R(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{h}})}\big)$ est une forme réelle déployée de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $\mathfrak{g}_u := \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\big((\mathrm{i}H_\alpha)_{\alpha\in B},(X_\alpha-X_{-\alpha})_{\alpha>0},(\mathrm{i}(X_\alpha+X_{-\alpha}))_{\alpha>0}\big)$ est une forme réelle compacte de $\widetilde{\mathfrak{g}}$.
Les formes réelles déployées (resp. compactes) de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ sont conjuguées à $\mathfrak{g}_d$ (resp. $\mathfrak{g}_u$) sous $\operatorname{int}\widetilde{\mathfrak{g}}$.

(b) Les applications d'une part qui à une forme réelle $\mathfrak{g}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ de conjugaison σ associe la classe de $\sigma\tau$ après avoir fait le choix d'une conjugaison τ d'une forme réelle compacte stable par σ (existe), et d'autre part qui à une involution θ associe la classe de la forme réelle $\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{k}=\{\theta X=X\}\cap\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{p}=\{\theta X=-X\}\cap\mathrm{i}\mathfrak{u}$ après avoir fait le choix d'une forme réelle compacte $\mathfrak{u}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ stable par θ (existe), fournissent une bijection de $(\operatorname{Aut}_{\mathrm{alg}}\widetilde{\mathfrak{g}})\backslash\{\text{formes réelles de } \widetilde{\mathfrak{g}}\}$ sur $\operatorname{int}(\operatorname{Aut}_{\mathrm{alg}}\widetilde{\mathfrak{g}})\backslash\{\text{involutions de } \widetilde{\mathfrak{g}}\}$.

Diagrammes de Dynkin

← [classification des $\tilde{\mathfrak{s}}|_{\mathbb{R}}$]

Définition

(a) Un *graphe normé* est un triplet (S, A, f) où S est un ensemble (« sommets »), A est une partie de S formée d'ensembles à deux éléments (« arêtes »), et $f\colon \{(i,j)\ ;\ \{i,j\} \in A\} \to \mathbb{R}$ vérifie $f(j,i)\,f(i,j) = 1$ pour $\{i,j\} \in A$.

(b) Un isomorphisme d'un graphe normé (S, A, f) sur un graphe normé (S', A', f') est une bijection φ de S sur S' telle que $f(A) = A'$ et $f'(\varphi(i), \varphi(j)) = f(i,j)$ pour tout $\{i,j\} \in A$.

Proposition

(a) Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie complexe. On note J la multiplication par i dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

On note $\overline{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ l'algèbre de Lie complexe (isomorphe à $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par conjugaison) d'addition et de crochet ceux de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, et de loi externe $\times$ par laquelle $\mathbb{C}$ agit sur $\overline{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ déterminée par : $\lambda \times X = \overline{\lambda} X$.

Les algèbres de Lie complexes $\big(\widetilde{\mathfrak{g}}|_{\mathbb{R}}\big)_{\mathbb{C}}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}} \times \overline{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ sont isomorphes par le morphisme d'algèbres de Lie $X + \mathrm{i}Y \mapsto (X + JY, X - JY)$ de réciproque $(X', Y') \mapsto \frac{1}{2}(X' + Y') - \frac{\mathrm{i}}{2} J(X' - Y')$.

(b) Soient $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie semi-simple et $\widetilde{\mathfrak{h}} \in \operatorname{Car} \widetilde{\mathfrak{g}}$.

Pour chaque $\alpha \in \widetilde{\mathfrak{h}}^*$, on pose : $\widetilde{\mathfrak{g}}^\alpha := \{X \in \widetilde{\mathfrak{g}} \mid \forall H \in \widetilde{\mathfrak{h}} \quad [H, X] = \alpha(H) X\}$.

L'ensemble R égal à $R(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{h}}) := \{\alpha \in \widetilde{\mathfrak{h}}^* \setminus \{0\} \mid \widetilde{\mathfrak{g}}^\alpha \neq \{0\}\}$ est un système de racines réduit dans $\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(\alpha)_{\alpha \in R}$. Il est irréductible si et seulement si $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est simple.

On fixe un produit scalaire $(\ |\ )$ sur $\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(\alpha)_{\alpha \in R}$ qui rend les $w \in W(R)$ isométries.

Le diagramme de Dynkin associé à une base B de R est le graphe normé (B, A, f) tel que :

$$A := \{\{\alpha, \beta\}\ ;\ \alpha, \beta \in B \text{ distincts et } \alpha \not\perp \beta\} \quad \text{et} \quad f(\alpha, \beta) := \tfrac{(\alpha|\alpha)}{(\beta|\beta)} \quad \text{pour } \{\alpha, \beta\} \in A.$$

(b) Soient $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}'$ des algèbres de Lie complexes de dimension finie semi-simples.

On se donne $\widetilde{\mathfrak{h}} \in \operatorname{Car} \widetilde{\mathfrak{g}}$, $\widetilde{\mathfrak{h}}' \in \operatorname{Car} \widetilde{\mathfrak{g}}'$, et des bases B et B' de $R(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{h}})$ et $R(\widetilde{\mathfrak{g}}', \widetilde{\mathfrak{h}}')$.

On a : $\widetilde{\mathfrak{g}}|_{\mathbb{R}}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}'|_{\mathbb{R}}$ sont isomorphes si et seulement si $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}'$ sont isomorphes, c'est-à-dire si et seulement si les diagrammes de Dynkin de $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{h}}, B)$ et $(\widetilde{\mathfrak{g}}', \widetilde{\mathfrak{h}}', B')$ sont isomorphes.

Diagrammes de Satake

← [classification des $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$]

Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie rélle de dimension finie semi-simple.

On se donne $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a} \in \operatorname{Car} \mathfrak{g}$ maximalement déployée.

(a) On note $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}^\lambda \neq \{0\}\}$ où $\mathfrak{g}^\lambda := \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{a} \ \ [H, X] = \lambda(H) X\}$. Donc $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ est un système de racines, peut-être non réduit, dans $\mathfrak{a}^*$.

On a : $\mathfrak{g} = \mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \oplus \big(\bigoplus_{\lambda \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})} \mathfrak{g}^\lambda\big)$ où $\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{a}] = \{0\}\}$.

(b) On a : $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\alpha_{|\mathfrak{a}}\ ;\ \alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \text{ et } \alpha_{|\mathfrak{a}} \neq 0\}$ et $(\mathfrak{g}^\lambda)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\substack{\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \\ \text{et } \alpha_{|\mathfrak{a}} = \lambda}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$ pour $\lambda \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.
De plus : $W(\check{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})) = \{w_{|\mathfrak{a}}\ ;\ \alpha \in W(\check{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})) \text{ et } w(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}\}$.
On fixe une base B_0 de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. $\underbrace{\text{On a}}_{\text{(exercice de Knapp)}}$: $B_0 = \{\alpha_{|\mathfrak{a}} ; \alpha \in B \text{ et } \alpha_{|\mathfrak{a}} \neq 0\}$ pour une base B de $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$.

(c) On note $R_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \{\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \mid \alpha_{|\mathfrak{a}} = 0\}$ et $B_I = \{\alpha \in \overbrace{B}^{\text{(ci-dessus)}} \mid \alpha_{|\mathfrak{a}} = 0\}$.
Donc $R_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est un système de racines de base B_I et $\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \big(\bigoplus_{\lambda \in R_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha\big) \oplus \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$.

De plus : $W(\check{R_I}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})) = \{w \in W(\check{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})) \mid w_{|\mathfrak{a}} = \mathrm{id}\}$

(d) Il existe une permutation involutive $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$ de $B \setminus B_I$ telle que : $\overline{\alpha} - \widetilde{\alpha} \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(\beta)_{\beta \in B_I}$.

Le *diagramme de Satake de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *associé à* B s'obtient à partir du diagramme de Dynkin de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, B)$ en reliant α et $\widetilde{\alpha}$ par une double flèche, et noircissant les sommets associés à B_I.

(e) Soit $\mathfrak{g}'$ une algèbre de Lie rélle de dimension finie semi-simple, $\mathfrak{h}' \in \operatorname{Car} \mathfrak{g}'$ maximalement déployée, et B' une base de $R(\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}'_{\mathbb{C}})$. On a : $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sont isomorphes si et seulement si les diagrammes de Dynkin de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, B)$ et de $(\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}'_{\mathbb{C}}, B')$ sont isomorphes par une bijection qui échange au niveau des diagrammes de Satake les paires $\{\alpha, \widetilde{\alpha}\}$ et les sommets noircis.