Classification des sous-algèbres de Cartan (J-Y D)

Références

• A. W. Knapp *Lie groups beyond an introduction*, Ch. 6 : §5, §6, §7. Cote : 25 KNA 96 (édition augmentée 25 KNA 02).

• M. Sugiura *Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras.*, Journal of the Mathematical Society of Japan 11 (1959), th. 6 p. 395.

On fixe un groupe de Lie réel connexe G dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Sous-groupes de Cartan

Définition

(a) Soit $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$. On pose :

$\mathrm{C}_G(\mathfrak{h}) = \{x \in G \mid \forall X \in \mathfrak{h} \quad \operatorname{Ad} x\cdot X = X\}$ « centralisateur de $\mathfrak{h}$ dans G » ;

$\mathrm{N}_G(\mathfrak{h}) = \{x \in G \mid \forall X \in \mathfrak{h} \quad \operatorname{Ad} x\cdot X \in \mathfrak{h}\}$ « normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans G ».

On constate que $H := \mathrm{C}_G(\mathfrak{h})$ est un sous-groupe de Lie de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On appelle H *le sous-groupe de Cartan* de G associé à $\mathfrak{h}$.

(b) Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\operatorname{int}\widetilde{\mathfrak{g}}$ le sous-groupe de $GL(\widetilde{\mathfrak{g}})$ engendré par les $\exp(\operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} X)$ avec $X \in \widetilde{\mathfrak{g}}$. Ainsi, lorsque $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie connexe $\widetilde{G}$ on a : $\operatorname{int}\widetilde{\mathfrak{g}} = \operatorname{Ad}\widetilde{G}$.

Proposition

(a) Le groupe $W(G,\mathfrak{h}) := \mathrm{N}_G(\mathfrak{h})/H$ s'identifie à un sous-groupe de $W(R(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C}))$ par le morphisme de groupes injectif $\dot{x} \mapsto {}^t((\operatorname{Ad} x)_{|\mathfrak{h}})^{-1}$ de $W(G,\mathfrak{h})$ dans $W(R(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C}))$. On appelle $W(G,\mathfrak{h})$ *le sous-groupe de Weyl* de $(G,\mathfrak{h})$.

(b) Pour tous $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2 \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$, il existe $g_\mathbb{C} \in \operatorname{int}(\mathfrak{g}_C)$ tel que : $(\mathfrak{h}_2)_\mathbb{C} = (\operatorname{Ad} g_\mathbb{C})((\mathfrak{h}_1)_\mathbb{C})$.

On appelle *rang de* $\mathfrak{g}$ la dimension l commune aux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Éléments semi-simples réguliers

Définition

(a) On note : $\mathfrak{g}_s = \{X \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad}_\mathfrak{g} X \text{ est diagonalisables sur } \mathbb{C}\}$ «éléments semi-simples de $\mathfrak{g}$» et $G_s = \{x \in G \mid \operatorname{Ad}_G x \text{ est diagonalisables sur } \mathbb{C}\}$ « éléments semi-simples de G ».

(b) On pose : $\det(\lambda\,\mathrm{id} - \operatorname{ad}_\mathfrak{g} X) = \lambda^n + \mathscr{D}_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + ... + \mathscr{D}_l(X)\lambda^l$ pour $X \in \mathfrak{g}$, et $\det(\lambda\,\mathrm{id} - (\operatorname{Ad}_G x - \mathrm{id})) = \lambda^n + D_{n-1}(x)\lambda^{n-1} + ... + D_l(x)\lambda^l$ pour $x \in G$ $(n := \dim G)$.

On note : $\mathscr{D}_\mathfrak{g} = \mathscr{D}_l$ et $\mathfrak{g}' = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathscr{D}_\mathfrak{g}(X) \neq 0\}$ « éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$ », $D_G = D_l$ et $G' = \{x \in G \mid D_G(x) \neq 0\}$ « éléments semi-simples réguliers de G ».

Proposition

(a) Les parties $\mathfrak{g}'$ et G' de $\mathfrak{g}$ et G sont des ouverts denses de complémentaires négligeables.

(b) On a : $\mathfrak{g}' = \bigcup_{\dot{\mathfrak{h}} \in \operatorname{Ad} G\backslash \operatorname{Car}\mathfrak{g}} \operatorname{Ad} G\cdot(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}') \subseteq \mathfrak{g}_s = \bigcup_{\dot{\mathfrak{h}} \in \operatorname{Ad} G\backslash \operatorname{Car}\mathfrak{g}} \operatorname{Ad} G\cdot\mathfrak{h}$ où $\underbrace{H}_{\text{dans ce qui suit}} := \mathrm{C}_G(\mathfrak{h})$

avec

$$\begin{array}{ccc} W(G,\mathfrak{h})\backslash\big(G/H \times (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}')\big) & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{C}^\infty} & \operatorname{Ad} G\cdot(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}') \\ W(G,\mathfrak{h})\cdot(\dot{g},X) & \longmapsto & \operatorname{Ad} g\cdot X \end{array}$$

pour l'action $\dot{v}\cdot(\dot{g},X) := (\dot{\widehat{gv^{-1}}}, \operatorname{Ad} v\cdot X)$,

et $G' = \bigcup_{\dot{\mathfrak{h}} \in \operatorname{Ad} G\backslash \operatorname{Car}\mathfrak{g}} \operatorname{int} G\cdot(H\cap G') \subseteq G_s = \bigcup_{\dot{\mathfrak{h}} \in \operatorname{Ad} G\backslash \operatorname{Car}\mathfrak{g}} \operatorname{int} G\cdot H$ où $H := \mathrm{C}_G(\mathfrak{h})$

avec

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{N}_G(\mathfrak{h})/H^0)\backslash\big(G/H^0 \times (H\cap G')\big) & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{C}^\infty} & \operatorname{int} G\cdot(H\cap G') \\ (\mathrm{N}_G(\mathfrak{h})/H^0)\cdot(\dot{g},x) & \longmapsto & \operatorname{int} g\cdot x \end{array}$$

pour l'action $\dot{v}\cdot(\dot{g},x) := (\dot{\widehat{gv^{-1}}}, \operatorname{int} v\cdot x)$.

(c) Soit $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$. On pose : $H := \mathrm{C}_G(\mathfrak{h})$. On a : $\mathscr{D}_\mathfrak{g}(X) = \prod_{\alpha \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C})} \alpha(X)$ pour $X \in \mathfrak{h}$, et $D_G(x) = \prod_{\alpha \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C})} (1 - \xi_\alpha(x))$ pour $x \in H$, où $\xi_\alpha(x) \in \mathbb{C}$ est défini par $\operatorname{Ad} x|_{\mathfrak{g}_C^\alpha} = \xi_\alpha(x)\,\mathrm{id}$.

On fixe dorénavant une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$.

Diverses racines et diverses sous-algèbres de Cartan

Définition-Proposition(*)

(a) On note $\mathfrak{t} \overset{\text{variante}}{=} \mathfrak{h}_{\text{ell}} := \{X \in \mathfrak{h} \mid \text{les valeurs propres de } \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X \text{ sont dans } \mathrm{i}\mathbb{R}\}$
et $\mathfrak{a} \overset{\text{variante}}{=} \mathfrak{h}_{\text{hyp}} := \{X \in \mathfrak{h} \mid \text{les valeurs propres de } \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X \text{ sont dans } \mathbb{R}\}$.

Ainsi : $\boxed{\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}}$. De plus : $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\big((H_\alpha)_{\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}\big)$ s'écrit $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathrm{i}\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$.

(b) Soit $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. On pose : $\overline{\alpha}(X) = \overline{\alpha(\overline{X})}$ pour $X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, donc $\overline{\alpha} \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$.
D'où : $H_{\overline{\alpha}} = \overline{H_\alpha}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\overline{\alpha}} = \overline{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}}$, $s_{\overline{\alpha}}(X) = \overline{s_\alpha(\overline{X})}$ pour $X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, $\xi_{\overline{\alpha}} = \overline{\xi_\alpha}$. $\leftarrow [\xi_{-\alpha} = (\xi_\alpha)^{-1}$ et $\operatorname{Lie} \xi_\alpha = \alpha_{|\mathfrak{h}}]$

On dit que $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est *réelle* (respectivement *imaginaire*, *compacte*, ou *complexe*) quand $\overline{\alpha} = \alpha$ (respectivement $\overline{\alpha} = -\alpha$, $(\mathbb{C}H_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}) \cap \mathfrak{g} \overset{\text{alg. Lie}}{\simeq} \mathfrak{su}(2)$, ou $\overline{\alpha} \notin \{\alpha, -\alpha\}$).

On constate que toute racine compacte est imaginaire.

(c) On dit que $\mathfrak{h}$ est *déployée* si $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$, c'est-à-dire $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est formé de racines réelles.

On dit que $\mathfrak{h}$ est *maximalement déployée* si la dimension de $\mathfrak{a}$ est maximale pour la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ n'a pas de racine imaginaire non-compacte.

Les sous-algèbres de Cartan maximalement déployées de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées sous $\operatorname{Ad} G$.

(d) On dit que $\mathfrak{h}$ est *compacte* si $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$, c'est-à-dire $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est formé de racines imaginaires.

On dit que $\mathfrak{h}$ est *maximalement compacte* (ou *fondamentale*) si la dimension de $\mathfrak{t}$ est maximale pour la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ n'a pas de racine réelle. Dans ce cas, le sous-groupe de Cartan $H = \mathrm{C}_G(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ est connexe.(**)

Les sous-algèbres de Cartan maximalement compactes de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées sous $\operatorname{Ad} G$.

Transformation de Cayley

On décompose $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, avec $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}_{\text{ell}}$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}_{\text{hyp}}$ comme ci-dessus.

Définition-Proposition

(a) On appelle *ensemble de racines réelles fortement orthogonales de* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ une partie F de $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ formée de racines réelles telles que :

$$\beta \neq -\alpha, \ \alpha + \beta \notin R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \text{ et } \alpha - \beta \notin R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \text{ pour tous } \alpha,\beta \in F \text{ distincts.}$$

Dans ce cas F a ses éléments orthogonaux pour tout produit scalaire $W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$-invariant.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des ensembles de racines réelles fortement orthogonales de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

(b) Soit $F \in \mathcal{F}$. On pose : $c = \underset{\text{(produit commutatif)}}{\prod_{\alpha \in F}} \exp(-\frac{\mathrm{i}\pi}{4} \operatorname{ad}(X_\alpha + X_{-\alpha}))$ et $\mathfrak{h}_F = (c\,\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{g} \in \operatorname{Car} \mathfrak{g}$,
où pour $\alpha \in F$, on a fixé $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \cap \mathfrak{g}$ et $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha} \cap \mathfrak{g}$ tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ (existe).
On a : $\mathfrak{h}_F = \mathfrak{t}_F \oplus \mathfrak{a}_F$ avec $\mathfrak{t}_F = (\mathfrak{h}_F)_{\text{ell}} = \mathfrak{t} \oplus \big(\bigoplus_{\alpha \in F} \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha})\big)$ et $\mathfrak{a}_F = (\mathfrak{h}_F)_{\text{hyp}} = \mathfrak{a} \cap \big(\bigcap_{\alpha \in F} \operatorname{Ker} \alpha\big)$.

De plus : $(\mathfrak{h}_F)_{\mathbb{R}} = c\,\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ et $\overline{c\,X} = c\,\big(\prod_{\alpha \in F} {}^t s_\alpha{}^{-1}\big)\,\overline{X}$ pour tout $X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

(c) On suppose que $\mathfrak{h}$ est maximalement déployée.

On pose : $W(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) := \{w_{|\mathfrak{a}} \,;\, w \in W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \text{ et } w(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}\}$.

L'application $W(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \backslash \{F \cup (-F)\}_{F \in \mathcal{F}} \to \operatorname{Ad} G \backslash \operatorname{Car} \mathfrak{g}$ est définie et bijective.
$W(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \cdot (F \cup (-F)) \quad \mapsto \quad \operatorname{Ad} G \cdot \mathfrak{h}_F$

En particulier, l'ensemble $\operatorname{Ad} G \backslash \operatorname{Car} \mathfrak{g}$ est fini.

(*) Soient plus généralement G un groupe de Lie réel connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ réductive et $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car} \mathfrak{g}$.
On note : $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{\text{associé à } \mathfrak{h} \cap \mathrm{D}(\mathfrak{g})} \oplus \mathfrak{t}_Z$ où $\mathfrak{t}_Z$ est l'algèbre de Lie de l'unique tore maximal de $\mathrm{Z}(G)_0$
et $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\text{associé à } \mathfrak{h} \cap \mathrm{D}(\mathfrak{g})} \oplus \mathfrak{a}_Z$ où $\mathfrak{a}_Z$ est un supplémentaire fixé de $\mathfrak{t}_Z$ dans $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ (par exemple l'ensemble des éléments de $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ dont toutes les valeurs propres sont réelles quand $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de matrices avec un centre formé de matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$). On obtient : $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ et
– $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ si et seulement si $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est formé de racines réelles et $\mathrm{Z}(G)_0$ est isomorphe à un groupe $(\mathbb{R}^n,+)$;
– $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$ si et seulement si $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est formé de racines imaginaires et $\mathrm{Z}(G)_0$ est compact.
(**) Dans le cas où $\mathfrak{h}$ est compacte et $G = \operatorname{int} \mathfrak{g}$, ce groupe $H = \exp \mathfrak{h}$ est compact.