Formule de Weyl : à retenir (J-Y D)

Références

• J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, chapitre 7 §5.
Cote : 25 DIX 74 (traductions 25 DIX 77 puis 25 DIX 96).

• A. W. Knapp *Lie groups beyond an introduction*, chapitre IV et V 6 et 8.
Cote : 25 KNA 96 (édition augmentée 25 KNA 02).

Cas d'une algèbre de Lie réductive complexe

On considère une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ de dimension finie semi-simple.

On fixe $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$ et une base B de $R := R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On pose : $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$.

On note $B' = (\varpi_\alpha)_{\alpha \in B}$ la base de $\mathfrak{h}$ duale de $(H_\alpha)_{\alpha \in B}$, $P := \bigoplus_{\alpha \in B} \mathbb{Z}\,\varpi_\alpha$ et $P_+ := \bigoplus_{\alpha \in B} \mathbb{N}\,\varpi_\alpha$.

Définition-Proposition

On introduit le sous-anneau suivant de l'algèbre $\mathbb{C}[P]$ du groupe additif $(P, +)$:
$\mathbb{Z}[P] := \mathbb{Z}^{(P)} = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{Z}\, e^\lambda$ où $e^\mu(\lambda) := \delta_{\mu,\lambda}$ et $e^\lambda e^\mu := e^{\lambda+\mu}$ pour $\lambda, \mu \in P$.

(a) Pour tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie V, on pose :

$$\operatorname{ch} V := \sum_{\lambda \in P} (\dim V_\lambda)\, e^\lambda \in \mathbb{Z}[P]^{W(R)}.$$

(b) Pour tous $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie V et W, on a :

$\operatorname{ch} V = \operatorname{ch} W$ si et seulement si les $\mathfrak{g}$-modules V et W sont isomorphes.

De plus : $\operatorname{ch}(V \oplus W) = \operatorname{ch} V + \operatorname{ch} W$ et $\operatorname{ch}(V \otimes W) = (\operatorname{ch} V)\,(\operatorname{ch} W)$.

Théorème

Soit $\mu \in P_+$. On fixe un $\mathfrak{g}$-module simple V_μ de poids dominant μ pour B.

(a) On pose : $\varepsilon(w) := \det w \in \{-1, 1\}$ pour tout $w \in W(R)$.

(b) Dans le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}P]$ (qui est défini comme $\mathbb{Z}[P]$), on a :

$$\operatorname{ch}(V_\mu) = \frac{\sum_{w \in W(R)} \varepsilon(w)\, e^{w(\mu+\rho)}}{\prod_{\alpha \in R^+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})}$$ « formule du caractère de Weyl ».

(c) En particulier (cas $\mu = 0$), on a : $\prod_{\alpha \in R^+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}) = \sum_{w \in W(R)} \varepsilon(w)\, e^{w(\rho)}$.

(d) On a de plus : $\dim(V_\mu) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\langle \mu+\rho, H_\alpha \rangle}{\langle \rho, H_\alpha \rangle}$ « formule de la dimension de Weyl ».

Représentations unitaires d'un groupe de Lie réel

On considère un groupe de Lie réel G.

Définition-Proposition

Soient ρ et τ des représentation de G dans des espaces de Hilbert complexes V et W.

(a) On dit que la représentation ρ de G dans V est *continue* si l'application $\begin{array}{rcl} G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & \rho(g)\, v \end{array}$ est continue. On dit que ρ est *unitaire* si elle est continue et les $\rho(g)$ avec $g \in G$ sont unitaires.

(b) On dit que ρ est (topologiquement) irréductible si $V \neq \{0\}$ et le seul sous-espace vectoriel fermé non-nul stable sous G de V est V.

(c) On suppose ρ et τ unitaires continues. On dit que ρ et τ sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme linéaire $T \colon V \to W$ tel que : $T(\rho(g)v) = \tau(g)(Tv)$ pour tous $g \in G$ et $v \in V$.

On note $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations unitaires irréductibles de G.

Définition-Proposition

Soient G un groupe de Lie réel et (V,ρ) un G-module complexe de dimension finie.

(a) Le *caractère de* V est l'application $\chi_V\colon G\to\mathbb{C}$ définie par : $(\chi_V)(x)=\mathrm{tr}(\rho(x))$ pour $x\in G$.
Ce caractère χ_V, noté aussi $\mathrm{tr}\,\rho$, est déterminé par la classe d'isomorphisme du G-module V.

(b) On a : $\chi_V(gxg^{-1})=\chi_V(x)$ pour tous $g,x\in G$ « χ_V est central ».

(c) On a : $\chi_V=\chi_{V_1}+...+\chi_{V_p}$ quand V est somme directe de sous-G-modules $V_1,...,V_p$.

Cas d'un groupe de Lie réel compact connexe

On considère un groupe de Lie réel compact K d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ (par exemple un groupe fini).

Proposition

On se donne une représentation ρ de K dans un espace vectoriel complexe de dimension finie V.
On note d_K l'unique probabilité sur K qui est invariante par les translations à gauche.

(a) Les éléments de $\widehat{K}$ sont de dimension finie (N. Wallach, *Real Reducive Groups I*, page 26).

(b) Il existe un produit scalaire sur V tel que la représentation ρ est unitaire.
Le K-module V de dimension finie est donc somme directe de sous-modules simples V_1, ..., V_p.

(c) Les $\mathrm{tr}\,\rho\in C^\infty(K)$ avec $\dot\rho\in\widehat{K}$ sont dans $L^2(K)$ et deux à deux orthogonaux de norme 1.
En particulier, le caractère du K-module de dimension finie V détermine V à isomorphisme près.

Définition-Proposition

On suppose que K est connexe. On sait que : $\mathfrak{k}=\mathrm{Z}(\mathfrak{k})\oplus\mathrm{D}(\mathfrak{k})$ avec $\mathrm{D}(\mathfrak{k})$ semi-simple.

(a) On note : $\mathfrak{k}^*_{\mathrm{reg}}:=\big\{f\in\mathfrak{k}^*\mid\mathfrak{k}(f)\text{ est de dimension maximale}\big\}$, où $\mathfrak{k}(f):=\{X\in\mathfrak{k}\mid Xf=0\}$.
Pour $f\in\mathfrak{k}^*_{\mathrm{reg}}$, on pose : $K(f):=\{x\in K\mid xf=0\}$. Ainsi $\mathfrak{k}(f)\in\mathrm{Car}\,\mathfrak{k}$ et $K(f)=\exp(\mathfrak{k}(f))$.

(b) On note : $\mathfrak{k}^*_K:=\big\{f\in\mathfrak{k}^*_{\mathrm{reg}}\mid\exists\eta_f\colon K(f)\xrightarrow{\text{gr. Lie}}\mathbb{C}_u\ \ \mathrm{Lie}\,\eta_f=\mathrm{i}f|_{\mathfrak{k}(f)}-\rho_f|_{\mathfrak{k}(f)}\big\}$,
où $R^+_f:=\{\alpha\in R(\mathfrak{k}_\mathbb{C},\mathfrak{k}(f)_\mathbb{C})\mid\mathrm{i}f(H_\alpha)>0\}$ et $\rho_f:=\frac12\sum\limits_{\alpha\in R^+_f}\alpha$.

(c) Soit $f\in\mathfrak{k}^*_K$. Il existe un $\mathrm{D}(\mathfrak{k}_\mathbb{C})$-module simple V de plus haut poids $\mu:=\mathrm{i}f|_{\mathfrak{k}(f)_\mathbb{C}}-\rho_f$ relativement à R^+_f. Il existe une unique représentation T_f (*) de K dans V qui est C^∞ et telle que l'action dérivée de K dans V prolonge l'action de $\mathrm{D}(\mathfrak{k})$ sur V et fasse agir $\mathrm{Z}(\mathfrak{k})$ par les homothéties de rapport $\mathrm{i}f$. On munit V d'un produit scalaire rendant T_f unitaire. $\leftarrow[xV_\lambda=V_{x\lambda}\text{ pour }x\in\mathrm{N}_K(K(f))\text{ et }\lambda\in\mathfrak{k}(f)^*_\mathbb{C}]$

Proposition

On suppose que K est connexe. On fixe $\mathfrak{t}\in\mathrm{Car}\,\mathfrak{k}$ et une base B de $R:=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.
On pose : $T=\exp\mathfrak{t}$ et $\rho:=\frac12\sum\limits_{\alpha\in R^+}\alpha$, donc $\mathrm{N}_K(T)/T\underset{\text{can.}}{\xrightarrow{\sim}}W(R)$.

(a) On note : $\mathfrak{t}^{*+}_K:=\{f\in\mathfrak{t}^*\mid(\mathrm{i}f-\rho)(\mathrm{Ker}\exp_T(2\mathrm{i}\pi\,\cdot))\subseteq2\pi\mathbb{Z}\text{ et }\forall\alpha\in B\ \ \mathrm{i}f(H_\alpha)>0\}$.
On a des bijections $\mathfrak{t}^{*+}_K\underset{\text{can.}}{\xrightarrow{\sim}}K\backslash\mathfrak{k}^*_K\xrightarrow{\sim}\widehat{K}$ où $\mathfrak{t}^*\subseteq\mathfrak{k}^*$ par prolongement par 0 sur $[\mathfrak{t},\mathfrak{k}]$.
$Kf\ \mapsto\dot T_f$

(b) Soit $f\in\mathfrak{t}^{*+}_K$. On a : $\mathrm{tr}\,T_f(\exp X)=\dfrac{\sum\limits_{w\in W(R)}\varepsilon(w)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}wf(X)}}{\prod\limits_{\alpha\in R^+}\Big(\mathrm{e}^{\frac{\alpha(X)}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(X)}{2}}\Big)}$ quand $X\in\mathfrak{t}$ et $\mathrm{e}^{\alpha(X)}\neq1$ pour $\alpha\in R$.

Cela détermine $\mathrm{tr}\,T_f$ car l'application canonique de $W(R)\backslash T$ dans $\mathrm{int}\,K\backslash K$ est bijective.

(*) On peut construire T_f comme suit, cf. A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups*, th. 5.29.
On pose : $\mathfrak{b}^-_f:=\mathfrak{k}(f)_\mathbb{C}\oplus\sum\limits_{\alpha\in R^+_f}\mathfrak{k}(f)^{-\alpha}_\mathbb{C}$. On note $\widetilde V$ (le complété de) l'espace préhilbertien complexe :
$\widetilde V:=\big\{\varphi\in C^\infty(K)\mid\forall x\in K\ \forall y\in K(f)\ \varphi(xy^{-1})=\eta_f(y)\varphi(x),\ \forall X\in\mathfrak{b}^-_f\ (\cdot X)_*(\varphi)=(\mathrm{Lie}(\eta_f)(X))\varphi,\text{ et }\|\varphi\|<+\infty\big\}$
où $\|\varphi\|:=\Big(\int_{K/K(f)}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}\dot x\Big)$ (choix d'une mesure positive non-nulle K-invariante à gauche $\mathrm{d}\dot x$ sur $K/K(f)$),
$((\cdot X)_*(\varphi))(x):=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\varphi(x\exp(t\,\mathrm{Re}\,X))+\mathrm{i}\,\varphi(x\exp(t\,\mathrm{Im}\,X))\big)_{t=0}$ pour $X\in\mathfrak{b}^-_f$ et $x\in K$ et $\mathrm{Lie}(\eta_f)\big|_{[\mathfrak{k}(f)_\mathbb{C},\mathfrak{b}^-_f]}=0$
muni de l'action de K par $(g\varphi)(x):=\varphi(g^{-1}x)$ pour $\varphi\in\widetilde V$ et $g,x\in K$.
Soit $v_\mu\in V_\mu\setminus\{0\}$. Le morphisme de K-modules $v\in V\mapsto(\varphi_v\colon x\mapsto\langle x^{-1}v,v_\mu\rangle)\in\widetilde V$ est bijectif.