Groupes de Lie réels et complexes : à retenir (J-Y D)

On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition-Proposition

(a) On appelle *groupe de Lie réel* (resp. *complexe*) une variété C^∞ (resp. holomorphe) G munie d'une structure de groupe telle que l'application $\begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$ est de classe C^∞ (resp. holomorphe).

Dans ce cas, le passage à l'inverse $\begin{array}{rcl} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$ est de classe C^∞ (resp. holomorphe).

(b) Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$ (réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, complexe si $\mathbb{K} = C$).

On appelle *sous-groupe de Lie de G* un sous-groupe H de G qui est aussi une sous-variété de G. Par exemple, la composante connexe G_0 de 1 dans G est un sous-groupe de Lie ouvert de G.

(c) Soient G et H des groupes de Lie sur $\mathbb{K}$.

On appelle *morphisme* (resp. *isomorphisme*) *de groupes de Lie de G dans H* un morphisme de groupes $f\colon G \to H$ qui est aussi un morphisme (resp. isomorphisme) de variétés.

Définition-Proposition

Soient G et H des groupes de Lie sur $\mathbb{K}$, et f est un morphisme de groupe de Lie de G dans H.

(a) On note $\operatorname{Lie} G$ l'espace tangent T_1G à G au point 1.

Pour tout morphisme de groupe de Lie f de G dans H, on pose $\operatorname{Lie} f := T_1 f$.

(b) Pour tout $g \in G$, l'application $\operatorname{int} g\colon \begin{array}{rcl} G & \to & G \\ h & \mapsto & ghg^{-1} \end{array}$ est un morphisme de groupes de Lie.

(c) L'application $\operatorname{Ad}\colon \begin{array}{rcl} G & \to & GL(\operatorname{Lie} G) \\ g & \mapsto & \operatorname{Lie}(\operatorname{int} g) \end{array}$ est un morphisme de groupes de Lie.

(d) L'espace vectoriel $\operatorname{Lie} G$ est muni de la structure d'algèbre de Lie telle que $\operatorname{ad} = \operatorname{Lie}(\operatorname{Ad})$.

Cette algèbre de Lie s'appelle *l'algèbre de Lie de G*.

(e) Soit f un morphisme de groupe de Lie de G dans H

L'application linéaire $\operatorname{Lie} f$ est un morphisme d'algèbres de Lie de $\operatorname{Lie} G$ dans $\operatorname{Lie} H$.

Définition-Proposition

Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$. On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

(a) On appelle *sous-groupe intégral de G* tout sous-groupe H de G qui possède une structure de variété pour laquelle H est un groupe de Lie connexe et l'injection canonique inj de H dans G est une immersion. On identifie $\operatorname{Lie} H$ à son image par $\operatorname{Lie}(\text{inj})$, donc : $\boxed{\operatorname{Lie} H = \{X \in \mathfrak{g} \mid \underbrace{\exp}_{\text{cf. ci-dessous}}(\mathbb{K}X) \subseteq H\}}$.
Tout sous-groupe de Lie connexe de G est donc un sous-groupe intégral de G.

(b) L'application $H \mapsto \operatorname{Lie} H$ de l'ensemble des sous-groupes intégraux de G dans l'ensemble des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ est bijective. Sa réciproque va s'obtenir à partir du cas où $\dim H = 1$.

Soit $X \in \mathfrak{g}$. Le morphisme d'algèbres de Lie $t \in \mathbb{R} \mapsto tX \in \mathbb{R}X$ s'écrit $\operatorname{Lie}(\gamma_X)$ pour un unique morphisme de groupes de Lie $\gamma_X\colon (\mathbb{R},+) \to G$. On pose : $\exp X := \gamma_X(1)$.

Pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, le sous-groupe intégral H de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est :

$$H = \{\exp_G X_1 ... \exp_G X_n \ ;\ n \in \mathbb{N} \text{ et } X_1, ..., X_n \in \mathfrak{h}\}.$$

(c) Pour tout morphisme de groupes de Lie de G dans un groupe de Lie H, on a :

$$f(\exp_G X) = \exp_H \big((\operatorname{Lie} f)(X)\big) \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

On en déduit que $\operatorname{Lie} f$ détermine $f_{|G_0}$, car $G_0 = \{\exp_G X_1 ... \exp_G X_n \ ;\ n \in \mathbb{N} \text{ et } X_1, ..., X_n \in \mathfrak{g}\}$.

(d) L'application $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ est C^∞ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et holomorphe quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $T_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

On a : $\exp_G(0) = 1$ et $\exp(X+Y) = (\exp X)(\exp Y)$ lorsque $X, Y \in \mathfrak{g}$ vérifient $[X,Y] = 0$.

Exemples

(a) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre associative unifère de dimension finie.
L'ouvert $A^\times$ de A est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $(A, [\,,\,])$ et $\exp_{A^\times} a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ pour $a \in A$.

(b) Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $\leftarrow$ [ou un $\mathbb{H}$-espace vectoriel à droite de dimension finie]
D'après (a) : $GL(V)$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$. $\leftarrow$ [groupe de Lie réel pour V sur $\mathbb{H}$]

(c) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie, par exemple une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie.
L'ensemble $\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}(A) := \{g \in GL(A) \mid \forall a, b \in A \;\; g(ab) = g(a)g(b)\}$ des automorphismes de A, est un sous-groupe de Lie de $GL(A)$ d'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(A)$. $\leftarrow$ [utiliser l'exponentielle]

(d) Soit G un groupe de Lie complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
Le groupe de Lie réel $G_{|\mathbb{R}}$ déduit de G a pour algèbre de Lie l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_{|\mathbb{R}}$ déduite de $\mathfrak{g}$.

(e) Soit H un groupe de Lie réel d'algèbre de Lie de la forme $\mathfrak{g}_{|\mathbb{R}}$, avec $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie complexe. Si H est connexe, alors H s'écrit $G_{|\mathbb{R}}$ pour un unique groupe de Lie complexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposition

Soit H un sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie G. On pose $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\, H$.

(a) On a : $\underbrace{G/H}_{G/H := \{\dot g \,;\, g \in G\} \text{ où } \dot g := gH}$ a une unique structure de variété rendant $p\colon \begin{array}{l} G \to G/H \\ g \mapsto \;\; \dot g \end{array}$ submersion.

(b) L'application $\begin{array}{l} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to T_{\dot 1}(G/H) \\ \dot X \;\mapsto (T_1 p)(X) \end{array}$ est définie, linéaire et bijective.

(c) Quand H est distingué dans G, on a : le groupe quotient G/H est un groupe de Lie, l'application $p : g \in G \mapsto \dot g \in G/H$ est un morphisme de groupes de Lie, $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, et l'application $\dot X \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \mapsto (\mathrm{Lie}\, p)(X) \in \mathrm{Lie}(G/H)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Proposition

(a) Soit $f\colon G \to H$ un morphisme de groupes de Lie.
On a : $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-groupe de Lie de G et $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Lie}\, f)$.
Si f est surjectif, l'application $\dot x \in G/\mathrm{Ker}\, f \mapsto f(x) \in H$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

(b) Soient G_i, $i \in I$, des groupes de Lie indexés par un ensemble I.
L'intersection $\bigcap_{i \in I} G_i$ est un sous-groupe de Lie de G, avec : $\mathrm{Lie}(\bigcap_{i\in I} G_i) = \bigcap_{i\in I}(\mathrm{Lie}\, G_i)$.

(c) Soit G un groupe de Lie . On note : $\mathrm{Z}(G) := \{x \in G \mid \forall g \in G \;\; gx = xg\}$. On pose $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$.
Le *centre* $\mathrm{Z}(G)$ de G est un sous-groupe de Lie de G et $\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}(G)) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall g \in G \;\; \mathrm{Ad}\, g(X) = X\}$.

Théorème de Von Neumann

Soit G un groupe de Lie. Tout sous-groupe de Lie de G est fermé dans G.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tout sous-groupe fermé de G est un sous-groupe de Lie de G.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout sous-groupe fermé de G dont l'algèbre de Lie au sens réel est un sous-espace vectoriel complexe de celle de G est un sous-groupe de Lie de G.

Théorème (la définition de « simplement connexe » est dans le résumé sur les revêtements)

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie.

(a) Il existe un groupe de Lie simplement connexe $\widetilde{G}$, unique à un isomorphisme de groupe de Lie près, dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $\mathfrak{g}$. On se donne un tel groupe de Lie $\widetilde{G}$.

(b) Pour tout sous-groupe discret D de $\mathrm{Z}(\widetilde{G})$, on a : D est fermé et distingué dans $\widetilde{G}$, le groupe de Lie connexe $\widetilde{G}/D$ a une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{g}$, et $\mathrm{Z}(\widetilde{G}/D) = \mathrm{Z}(\widetilde{G})/D$.

(c) Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{g}$. Il existe un sous-groupe discret D de $\mathrm{Z}(\widetilde{G})$ tel que G est isomorphe à $\widetilde{G}/D$. Tout autre groupe discret D' de $\mathrm{Z}(\widetilde{G})$ tel que G est isomorphe à $\widetilde{G}/D'$, s'écrit $D' = f(D)$ avec $f\colon \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ isomorphisme de groupes de Lie.