Groupes de Lie classiques : définitions (J-Y D)

Références

- S. HELGASON, « Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces », p. 444–447 ;
- A. W. KNAPP, « Lie groups beyond an introduction », p. 4–6 et p. 26–27.

Notations

On fixe $n, p, q \in \mathbb{N}$ avec $p+q=n$ et $p \geq q$.

On pose : $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ et $[I_{p,q}]_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix}$.

On notera l'algèbre de Lie d'un groupe classique avec les lettres gothiques minuscules correspondantes.

Groupes linéaires et spécial-linéaires

$GL(n,\mathbb{C}) = \{g \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{C}) \mid \det g \neq 0\}$

$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ représente le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(n,\mathbb{C})$ muni du produit $[X,Y] \overset{\text{déf}}{=} XY - YX$

$GL(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \overline{g} = g\}$

$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \overline{X} = X\}$

$U^*(2n) \overset{\text{notation}}{=} GL(n,\mathbb{H}) \overset{\text{can}}{=} \{g \in GL(2n,\mathbb{C}) \mid g\, J_n = J_n\, \overline{g}\}$

$\mathfrak{u}^*(2n) \overset{\text{notation}}{=} \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H}) \overset{\text{can}}{=} \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid X\, J_n = J_n\, \overline{X}\}$

$SL(n,\mathbb{C}) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \det g = 1\}$

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$

$SL(n,\mathbb{R}) = GL(n,\mathbb{R}) \cap SL(n,\mathbb{C})$

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$

$SU^*(2n) \overset{\text{notation}}{=} SL(n,\mathbb{H}) \overset{\text{can}}{=} GL(n,\mathbb{H}) \cap SL(2n,\mathbb{C})$

$\mathfrak{su}^*(2n) \overset{\text{notation}}{=} \mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}) \overset{\text{can}}{=} \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H}) \cap \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C})$

Groupes orthogonaux et spécial-orthogonaux

$O(n,\mathbb{C}) \overset{\text{notation}}{=} O_{\mathbb{C}}(I_n) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid {}^t g\, g = I_n\}$

$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid {}^t X = -X\}$

$O(p,q) \overset{\text{notation}}{=} U_{\mathbb{R}}(I_{p,q}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^t g\, I_{p,q}\, g = I_{p,q}\}$

et $O(n) = O(n,0)$

$\mathfrak{o}(p,q) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid {}^t X = -I_{p,q}\, X\, I_{p,q}^{-1}\} = \left\{ \begin{matrix} p\updownarrow \\ q\updownarrow \end{matrix} \underset{\overleftrightarrow{p}\ \overleftrightarrow{q}}{\begin{pmatrix} A & {}^t B \\ B & D \end{pmatrix}} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid {}^t A = -A,\ {}^t D = -D \right\}$

et $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{o}(n,0)$

$SO(n,\mathbb{C}) = O(n,\mathbb{C}) \cap SL(n,\mathbb{C})$

$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$

$SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(n,\mathbb{C})$

et $SO(n) = SO(n,0)$

$\mathfrak{so}(p,q) = \mathfrak{o}(p,q)$

et $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$

Groupes unitaires et spécial-unitaires

$U(p,q) \overset{\text{notation}}{=} U_{\mathbb{C}}(I_{p,q}) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid g^* I_{p,q}\, g = I_{p,q}\}$

et $U(n) = U(n,0)$

$\mathfrak{u}(p,q) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X^* = -I_{p,q}\, X\, I_{p,q}^{-1}\} = \left\{ \begin{smallmatrix} p\updownarrow \\ q\updownarrow \end{smallmatrix} \underset{\overleftrightarrow{p}\ \overleftrightarrow{q}}{\begin{pmatrix} A & B^* \\ B & D \end{pmatrix}} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid A^* = -A,\ D^* = -D \right\}$

et $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{u}(n,0)$

$SU(p,q) = U(p,q) \cap SL(n,\mathbb{C})$

et $SU(n) = SU(n,0)$

$\mathfrak{su}(p,q) = \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$

et $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{su}(n,0)$

Groupes symplectiques

$\underset{\nwarrow \det=1}{Sp(2n,\mathbb{C})} \overset{\text{notation}}{=} O_{\mathbb{C}}(J_n) = \{g \in GL(2n,\mathbb{C}) \mid {}^t g\, J_n\, g = J_n\}$

$\underset{\nwarrow \mathrm{tr}=0}{\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})} = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid {}^t X = -J_n X J_n^{-1}\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n\updownarrow \\ n\updownarrow \end{smallmatrix} \underset{\overleftrightarrow{n}\ \overleftrightarrow{n}}{\begin{pmatrix} A & C \\ B & -{}^t A \end{pmatrix}} \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid {}^t B = B,\ {}^t C = C \right\}$

$\underset{\nwarrow \det=1}{Sp(2n,\mathbb{R})} \overset{\text{notation}}{=} O_{\mathbb{R}}(J_n) = Sp(2n,\mathbb{C}) \cap GL(2n,\mathbb{R})$

$\underset{\nwarrow \mathrm{tr}=0}{\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})} = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R})$

Groupes d'automorphismes de formes hermitiennes ou antihermitiennes sur $\mathbb{H}$

$\underset{\nwarrow \det=1}{Sp(p,q)} \overset{\text{notation}}{=} U_{\mathbb{H}}(I_{p,q}) = \{g \in GL(2n,\mathbb{C}) \mid g\, J_n = J_n\, \overline{g} \text{ et } g^* [I_{p,q}]_{\mathbb{C}}\, g = [I_{p,q}]_{\mathbb{C}}\}$

et $Sp(n) = Sp(n,0)$

$\left(\text{Helgason considère : } \operatorname{int} \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & I_q & & \\ & & I_p & \\ & & & -I_q \end{pmatrix} \cdot Sp(p,q) = \{g \in Sp(2n,\mathbb{C}) \mid g^* [I_{p,q}]_{\mathbb{C}}\, g = [I_{p,q}]_{\mathbb{C}}\}\right)$

$\underset{\nwarrow \mathrm{tr}=0}{\mathfrak{sp}(p,q)} = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid X\, J_n = J_n\, \overline{X} \text{ et } X^* = -[I_{p,q}]_{\mathbb{C}}\, X\, [I_{p,q}]_{\mathbb{C}}^{-1}\}$

$= \left\{ \begin{smallmatrix} n\updownarrow \\ n\updownarrow \end{smallmatrix} \underset{\overleftrightarrow{n}\ \overleftrightarrow{n}}{\begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}} \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid A = \begin{smallmatrix} p\updownarrow \\ q\updownarrow \end{smallmatrix} \underset{\overleftrightarrow{p}\ \overleftrightarrow{q}}{\begin{pmatrix} U & V^* \\ V & W \end{pmatrix}},\ U^* = -U, W^* = -W,\ B = \begin{smallmatrix} p\updownarrow \\ q\updownarrow \end{smallmatrix} \underset{\overleftrightarrow{p}\ \overleftrightarrow{q}}{\begin{pmatrix} X & -{}^t Y \\ Y & Z \end{pmatrix}}, {}^t X = X, {}^t Z = Z \right\}$

et $\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(n,0)$

$\underset{\nwarrow \det=1}{SO^*(2n)} \overset{\text{notation}}{=} U_{\mathbb{H}}(j\, I_n) \overset{\text{can}}{=} GL(n,\mathbb{H}) \cap O(2n,\mathbb{C}),$

$\left(\text{Knapp considère : } \operatorname{int} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & -i\, I_n \\ I_n & i\, I_n \end{pmatrix} \cdot SO^*(2n) = GL(n,\mathbb{H}) \cap U(n,n)\right)$

$\underset{\nwarrow \mathrm{tr}=0}{\mathfrak{so}^*(2n)} \overset{\text{notation}}{=} \mathfrak{u}_{\mathbb{H}}(j\, I_n) \overset{\text{can}}{=} \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H}) \cap \mathfrak{o}(2n,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{smallmatrix} n\updownarrow \\ n\updownarrow \end{smallmatrix} \underset{\overleftrightarrow{n}\ \overleftrightarrow{n}}{\begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}} \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid {}^t A = -A,\ B^* = B \right\}$