Groupes orthogonaux et unitaires : à retenir (J-Y D)

Le corps $\mathbb{H}$ des quaternions

(a) On note : $\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

On identifie $a \in \mathbb{R}$ à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et pose : $\mathrm{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le corps $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel à droite : $\mathbb{C} = 1\mathbb{R} \oplus \mathrm{i}\mathbb{R}$.

(b) On note : $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

On identifie $a \in \mathbb{C}$ à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et pose : $\mathrm{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{k} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$.

D'où : $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$, et, $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}$ et $\mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}$ et $\mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}$.

Pour $q = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{a}} + \mathrm{i}\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{b}} + \mathrm{j}\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{c}} + \mathrm{k}\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{d}} \in \mathbb{H}$, on note :

$\operatorname{Re} q = a$, $\overline{q} = \underbrace{a - \mathrm{i}b - \mathrm{j}c - \mathrm{k}d}_{\text{pas le conjugué, mais l'adjoint dans } \mathfrak{M}(2,\mathbb{C})\,!}$ et $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ ce qui donne $q^{-1} = \frac{1}{|q|}\,\overline{q}$ quand $q \neq 0$.

Le corps $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel à droite : $\mathbb{H} = \underbrace{\overbrace{1\mathbb{R}}^{\text{centre de } \mathbb{H}} \oplus \mathrm{i}\mathbb{R}}_{1\,\mathbb{C}} \oplus \underbrace{\mathrm{j}\mathbb{R} \oplus \mathrm{k}\mathbb{R}}_{\mathrm{j}\,\mathbb{C}}$.

Matrice d'une application $\mathbb{H}$-linéaire

On fixe trois espaces vectoriels de dimension finie E, F et G <u>à droite</u> sur $\mathbb{H}$.$^{(*)}$

On se donne des bases $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_p)$ de E, $\mathscr{C} = (w_1, ..., w_n)$ de F et $\mathscr{D}$ de G.

(a) Soit $f \in \underbrace{\mathscr{L}(E, F)}_{\mathbb{R}\text{-espace vectoriel à droite}}$. *La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$* est :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} f := \begin{array}{c} \begin{matrix} f(v_1)/\mathscr{C} & \ldots & f(v_p)/\mathscr{C} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \Box & \ldots & \Box \end{pmatrix} \end{array}.$$

Il s'agit de l'unique matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{H})$ telle que $f : \underset{/\mathscr{B}}{v}\Big| X \longmapsto \underset{/\mathscr{C}}{w}\Big| Y$ où $Y = AX$.

b) L'application $f \in \mathscr{L}(E, F) \mapsto \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} f \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{H})$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels à droite, et $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \big(\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}\, g\big)\big(\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\, f\big)$ pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

(c) On pose : $M^* := {}^t\overline{M}$ pour tout $M \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{H})$.

On a : $(MN)^* = N^*M^*$ pour $M, N \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{H})$. En particulier : $\overline{mn} = \overline{n}\,\overline{m}$ pour $m, n \in \mathbb{H}$.

Injections $\mathfrak{M}(n, \mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{M}(2n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{M}(n, \mathbb{H}) \subseteq \mathfrak{M}(2n, \mathbb{C})$

(a) L'isomorphisme
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \overset{\mathbb{R}\text{-e.-v. à droite}}{\xrightarrow{\sim}} & \mathbb{R}^{2n} \\ z = \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{a}} + \mathrm{i}\ \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{b}} & \longmapsto & z_{\mathbb{R}} := (a, b) \end{array}$$
fournit le morphisme injectif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(n, \mathbb{C}) & \overset{\mathbb{R}\text{-algèbres}}{\hookrightarrow} & \mathfrak{M}(2n, \mathbb{R}) \\ M = \mathfrak{Mat}_{\text{base can.}} l = \underset{\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})}{\underset{\cap}{A}} + \mathrm{i}\ \underset{\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})}{\underset{\cap}{B}} & \longmapsto & [M]_{\mathbb{R}} := \mathfrak{Mat}_{\text{base can.}}(z_{\mathbb{R}} \mapsto l(z)_{\mathbb{R}}) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \end{array}.$$

D'où : $\mathfrak{M}(n, \mathbb{C}) \underset{\text{can.}}{\overset{\mathbb{R}\text{-algèbres}}{\simeq}} \{M \in \mathfrak{M}(2n, \mathbb{R}) \mid MJ_n = J_nM\}$ où $J_n := [-\mathrm{i}I_n]_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

On a : $(M \cdot z)_{\mathbb{R}} = [M]_{\mathbb{R}} \cdot z_{\mathbb{R}}$, $[M^*]_{\mathbb{R}} = [M]_{\mathbb{R}}^*$, $\det([M]_{\mathbb{R}}) = |\det M|^2$ et $\operatorname{tr}([M]_{\mathbb{R}}) = 2\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M)$.

(b) L'isomorphisme
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \overset{\mathbb{C}\text{-e.-v. à droite}}{\xrightarrow{\sim}} & \mathbb{C}^{2n} \\ q = \underset{\mathbb{C}^n}{\underset{\cap}{u}} + \mathrm{j}\ \underset{\mathbb{C}^n}{\underset{\cap}{v}} & \longmapsto & q_{\mathbb{C}} := (u, v) \end{array}$$
fournit le morphisme injectif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(n, \mathbb{H}) & \overset{\mathbb{R}\text{-algèbres}}{\hookrightarrow} & \mathfrak{M}(2n, \mathbb{C}) \\ M = \mathfrak{Mat}_{\text{base can.}} l = \underset{\mathfrak{M}(n,\mathbb{C})}{\underset{\cap}{U}} + \mathrm{j}\ \underset{\mathfrak{M}(n,\mathbb{C})}{\underset{\cap}{V}} & \longmapsto & [M]_{\mathbb{C}} := \mathfrak{Mat}_{\text{base can.}}(q_{\mathbb{C}} \mapsto l(q)_{\mathbb{C}}) = \begin{pmatrix} U & -\overline{V} \\ V & \overline{U} \end{pmatrix} \end{array}.$$

D'où : $\mathfrak{M}(n, \mathbb{H}) \underset{\text{can.}}{\overset{\mathbb{R}\text{-algèbres}}{\simeq}} \{M \in \mathfrak{M}(2n, \mathbb{C}) \mid MJ_n = J_n\overline{M}\}$ où $J_n = [-\mathrm{j}I_n]_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

On a : $(M \cdot q)_{\mathbb{C}} = [M]_{\mathbb{C}} \cdot q_{\mathbb{C}}$, $[M^*]_{\mathbb{C}} = [M]_{\mathbb{C}}^*$, $\det([M]_{\mathbb{C}}) \geq 0$ et $\operatorname{tr}([M]_{\mathbb{C}}) \in \mathbb{R}$.

$(*)$ Pour des espaces vectoriels à gauche, on obtiendrait seulement :

$${}^tY = {}^tX\,{}^tA \quad \text{et} \quad {}^t\big(\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f)\big) = {}^t\big(\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\, f\big)\,{}^t\big(\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}\, g\big).$$

Formes symétriques, antisymétriques, hermitiennes, antihermitiennes

On se place sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{F}^n$.

(a) On appelle *forme bilinéaire* (resp. *forme sesquilinéaire*) sur le $\mathbb{F}$-espace vectoriel à droite $\mathbb{F}^n$ une application $\varphi\colon \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ telle que :

(i) $\varphi(v' + v'', w) = \varphi(v', w) + \varphi(v'', w)$ et $\varphi(v, w' + w'') = \varphi(v, w') + \varphi(v, w'')$
(ii) $\varphi(v\lambda, w) = \lambda\, \varphi(v, w)$ $\big($resp. $\varphi(v\lambda, w) = \overline{\lambda}\, \varphi(v, w)\big)$ et $\varphi(v, w\mu) = \varphi(v, w)\mu$.

Elle s'écrit : $\varphi(X, Y) = {}^tX\Phi Y$ $\big($resp. $\varphi(X, Y) = X^*\Phi Y\big)$ avec $\underbrace{\Phi}_{\text{« matrice de } \varphi \text{ »}} := \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1\le i,j\le n}$.(**)

(b) Soit φ une forme bilinéaire (resp. une forme sesquilinéaire) sur $\mathbb{F}^n$ de matrice Φ. On appelle *groupe d'automorphismes de* φ le groupe de Lie réel suivant :

$$O_{\mathbb{F}}(\Phi) := \{g \in GL(n, \mathbb{F}) \mid {}^tg\Phi g = \Phi\} \qquad \big(\text{resp. } U_{\mathbb{F}}(\Phi) := \{g \in GL(n, \mathbb{F}) \mid g^*\Phi g = \Phi\}\big),$$

où $GL(n, \mathbb{F})$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathfrak{M}(n, \mathbb{F})$.

(c) Soit φ une forme bilinéaire (resp. une forme sesquilinéaire) sur $\mathbb{F}^n$ de matrice Φ. On dit que :

- φ est *non dégénérée* si Φ est inversible ;
- φ est *symétrique* (resp. *hermitienne*) si ${}^t\Phi = \Phi$ $\big($resp. $\Phi^* = \Phi\big)$;
- φ est *antisymétrique* (resp. *antihermitienne*) si ${}^t\Phi = -\Phi$ $\big($resp. $\Phi^* = -\Phi\big)$.

Classification

On fixe $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

(a) Soit φ une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathbb{F}^n$ qui est symétrique ou antisymétrique. Voici une précision ou une matrice Φ de φ, déterminée par φ, associée à une certaine base de $\mathbb{F}^n$:

	φ bilinéaire symétrique	φ bilinéaire antisymétrique
$\mathbb{F} = \mathbb{R}$	φ est sesquilinéaire hermitienne	$J_k = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$ avec $k = \frac{n}{2}$ (n est pair)
$\mathbb{F} = \mathbb{C}$	I_n	$J_k = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$ avec $k = \frac{n}{2}$ (n est pair)
$\mathbb{F} = \mathbb{H}$	$n = 0$	$n = 0$

(b) Soit φ une forme sesquilinéaire non dégénérée sur $\mathbb{F}^n$ qui est hermitienne ou antihermitienne. Voici une précision ou une matrice Φ de φ, déterminée par φ, associée à une certaine base de $\mathbb{F}^n$:

	φ sesquilinéaire hermitienne	φ sesquilinéaire antihermitienne
$\mathbb{F} = \mathbb{R}$	$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ avec $p + q = n$	φ est bilinéaire antisymétrique
$\mathbb{F} = \mathbb{C}$	$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ avec $p + q = n$	$\mathrm{i}\,\varphi$ est sesquilinéaire hermitienne
$\mathbb{F} = \mathbb{H}$	$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ avec $p + q = n$	$\mathrm{j}\, I_n$

(**) Toute matrice $\Phi \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{F})$ avec $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$) est la matrice de la forme bilinéaire $\varphi\colon (X, Y) \mapsto {}^tX\Phi Y$ $\big($resp. de la forme sesquilinéaire $\varphi\colon (X, Y) \mapsto X^*\Phi Y\big)$ sur $\mathbb{F}^n$. Par contre, l'égalité $\varphi((v\lambda)\mu, w) = \varphi(v(\lambda\mu), w)$ montre que seule la matrice nulle est la matrice d'une forme bilinéaire φ sur $\mathbb{H}^n$.