Réduction de Jordan : à retenir (J-Y D)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Définition-Proposition

On fixe $\lambda \in \mathbb{K}$.

(a) On appelle *espace propre de f pour λ* l'espace vectoriel $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id})$

(b) On appelle *polynôme caractéristique de f* le polynôme $\chi_f = \det(f - X\,\mathrm{id})$ et *valeurs propres de f dans* $\mathbb{K}$ les racines de χ_f dans $\mathbb{K}$.

(c) On appelle *polynôme annulateur de f* l'unique polynôme normalisé $\mu_f \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \qquad P(f)=0 \iff \mu_f \text{ divise } P.$$

(d) On appelle *sous-espace vectoriel caractéristique E'_λ de f pour λ* le sous-espace vectoriel E'_λ de E déterminé par : $\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id})^r = \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id})^{r+1} = E'_\lambda$.

Dans ce cas : $r_\lambda \overset{\text{déf}}{=} r$ est la multiplicité de λ dans μ_f et $m_\lambda \overset{\text{déf}}{=} \dim E'_\lambda$ est la multiplicité de λ dans χ_f.

Proposition

On suppose que les valeurs propres complexes distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_p$ de f sont dans $\mathbb{K}$.

(a) On a : $E = E'_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E'_{\lambda_p}$.

(b) Il existe des entiers $\xi^{(1)}_{\lambda_1} \geq \cdots \geq \xi^{(d_{\lambda_1})}_{\lambda_1} \geq 1$ et ... et $\xi^{(1)}_{\lambda_p} \geq \cdots \geq \xi^{(d_{\lambda_p})}_{\lambda_p} \geq 1$ uniques tels que E a une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de f est la « réduite de Jordan » suivante :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_1\end{matrix}}^{\xi^{(1)}_{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_1\end{matrix}}^{\xi^{(d_{\lambda_1})}_{\lambda_1}} \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_p & 1 & 0\\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_p\end{matrix}}_{\xi^{(1)}_{\lambda_p}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_p & 1 & 0\\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_p\end{matrix}}_{\xi^{(d_{\lambda_p})}_{\lambda_p}} \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \text{où } \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda\end{pmatrix}}^{\xi}}_{\text{« bloc de Jordan »}} \text{ signifie } (\lambda) \text{ si } \xi = 1.$$

(c) Les multiplicités des racines de μ_f et χ_f, et les dimension des espaces propres sont :

(i) $r_{\lambda_k} = \xi^{(1)}_{\lambda_k}$ (ordre du plus gros bloc de Jordan pour λ_k) ;

(ii) $m_{\lambda_k} = \xi^{(1)}_{\lambda_k} + \cdots + \xi^{(d_{\lambda_k})}_{\lambda_k}$ (somme des ordres des blocs de Jordan pour λ_k) ;

(iii) $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda_k\,\mathrm{id}) = d_{\lambda_k}$ (nombre de blocs de Jordan pour λ_k).

En particulier : $\chi_f = (-1)^n\,(X-\lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \cdots (X-\lambda_{\lambda_p})^{m_p}$ et $\mu_f = (X-\lambda_1)^{r_{\lambda_1}} \cdots (X-\lambda_p)^{r_{\lambda_p}}$

(d) <u>Méthode pour effectuer la réduction de Jordan</u> ($\lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$)

- Calculer $r \overset{\text{déf}}{=} r_\lambda$ et en déduire quelles réduites de Jordan sont envisageables.
- Décomposer $\mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id})^r = \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id})^{r-1} \oplus \underbrace{(\mathbb{K}a_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}a_k)}_{\text{les } a_i \text{ sont associés aux dernières colonnes des blocs de Jordan d'ordre } r}$ puis

$$\mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id})^{r-1} = \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id})^{r-2} \oplus \big(\mathbb{K}(f-\lambda\,\mathrm{id})(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}(f-\lambda\,\mathrm{id})(a_k)\big) \oplus \underbrace{(\mathbb{K}b_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}b_l)}_{\text{les } b_j \text{ sont associés aux dernières colonnes des blocs de Jordan d'ordre } r-1} \ \ldots$$

- À la fin on obtient $\mathscr{B}$ par juxtaposition en utilisant la base suivante de E'_λ :

$$\mathscr{B}_\lambda = \big((f-\lambda\,\mathrm{id})^{r_\lambda-1}(a_1), ..., (f-\lambda\,\mathrm{id})(a_1), a_1, \ldots, (f-\lambda\,\mathrm{id})^{r_\lambda-1}(a_k), ..., (f-\lambda\,\mathrm{id})(a_k), a_k;$$
$$(f-\lambda\,\mathrm{id})^{r_\lambda-2}(b_1), ..., (f-\lambda\,\mathrm{id})(b_1), b_1, \ldots, (f-\lambda\,\mathrm{id})^{r_\lambda-2}(b_l), ..., (f-\lambda\,\mathrm{id})(b_l), b_l; \cdots\big).$$