Modules à plus haut poids : à retenir (J-Y D)

Références

• J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes.* Cote : 25 DIX 74 (traductions 25 DIX 77 puis 25 DIX 96).

• A. W. Knapp *Lie groups beyond an introduction*, chapitre V 1, 2, 3. Cote : 25 KNA 96 (édition augmentée 25 KNA 02).

Généralités

Proposition

Soient π et ρ des représentations irréductibles d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ de dimension finie dans des espaces vectoriels complexes de dimension quelconque V et W.

(a) Tout morphisme de $\mathfrak{g}$-modules non-nul $f\colon V \to W$ est bijectif « lemme de Schur ».

(b) Les endomorphismes du $\mathfrak{g}$-module V sont les homothéties.

Définition-Proposition

Soient ϖ, π, ρ des représentations d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{h}$ dans des espaces vectoriels complexes U, V, W.

(a) Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On note : $V^\lambda = \{v \in V \mid \forall X \in \mathfrak{h} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (\pi(X) - \lambda(X)\,\mathrm{id})^n(v) = 0\}$ et $V_\lambda = \{v \in V \mid \forall X \in \mathfrak{h} \quad \pi(X)(v) = \lambda(X)\,v\}$, donc $V_\lambda \subseteq V^\lambda$.

(b) La somme $\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V^\lambda$ est directe. En particulier la somme $\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$ est directe.

(c) On dit que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est *un poids de* $\mathfrak{h}$ *dans* V si $V^\lambda \neq 0$.

Lorsque $\mathfrak{h}$ est commutative de dimension finie, cela équivaut à $\boxed{V_\lambda \neq 0}$.(*)

(d) Pour tout morphisme de $\mathfrak{h}$-modules $f\colon V \to W$ et tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on a :

$$f(V^\lambda) \subseteq W^\lambda \text{ et } f(V_\lambda) \subseteq W_\lambda.$$

(e) Pour toute application bilinéaire $B\colon V \times W \to U$ qui est invariante pour l'action de $\mathfrak{h}$ par $(XB)(v,w) := -B(Xv,w) - B(v,Xw) + X(B(v,w))$ (par exemple l'action $\mathfrak{g}\times W \to W$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ dans un $\mathfrak{g}$-module W, en particulier le crochet de $\mathfrak{g}$) et tous $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, on a :

$$B(V^\lambda \times W^\mu) \subseteq U^{\lambda+\mu} \text{ et } B(V_\lambda \times W_\mu) \subseteq U_{\lambda+\mu}.$$

Poids d'un $\mathfrak{g}$-module

On se donne maintenant une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ de dimension finie semi-simple.

On fixe $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{g}$ et une base B de $R := R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On pose : $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \mathrm{Vect}_\mathbb{R}(H_\alpha)_{\alpha\in R}$.

On fixe sur $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ une norme euclidienne $\| \ \|$ invariante sous $W(R)$.

On munit $\mathfrak{h}^*$ de l'ordre $\leq$ défini par : $\lambda \leq \lambda' \iff \lambda' - \lambda \in \sum_{\alpha\in B} \mathbb{R}^+\alpha$.

On note : $C = \{\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^* \mid \forall\alpha \in B \ \ \lambda(H_\alpha) > 0\}$, donc l'adhérence $\overline{C}$ de C vérifie $\overline{C} \subseteq \sum_{\alpha\in B} \mathbb{R}^+\alpha$.

On pose : $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in R^+} \alpha$, $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha\in R^+} \mathfrak{g}^\alpha$ $\quad \mathfrak{b} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha\in R^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

Proposition

On note $\mu_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}\colon \mathrm{Z}(U(\mathfrak{g})) \to S(\mathfrak{h})^{W(R)}$ l'isomorphisme d'Harish-Chandra.

On pose $\chi_\lambda(z) := \mu_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(z)(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $z \in \mathrm{Z}(U(\mathfrak{g}))$. $\leftarrow$ [Bourbaki le note "χ"$_{\lambda-\rho}$]

(a) Les morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres unifères $\chi\colon \mathrm{Z}(U(\mathfrak{g})) \to \mathbb{C}$ sont les χ_λ avec $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Pour tous $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, on a : $\chi_\mu = \chi_\lambda \iff \mu \in W(R)\cdot\lambda$.

(c) On a : $\chi_\lambda(C_\kappa) = \|\lambda\|^2 - \|\rho\|^2$ quand $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et C_κ est le Casimir de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

(∗) On suppose que $\mathfrak{h}$ est commutative de dimension finie, de base $(X_1, ..., X_d)$, et que $v \in V^\lambda \setminus \{0\}$.

On fixe $n_1, ..., n_d \in \mathbb{N}$ tels que : $(X_1 - \lambda(X_1))^{n_1} v = 0$, ..., $(X_d - \lambda(X_d))^{n_d} v = 0$.

On pose : $\widetilde{V} = \mathrm{Vect}(X_1^{i_1} ... X_d^{i_d} v)_{0\leq i_1\leq n_1-1,\ ...,0\leq i_d\leq n_d-1}$. Donc $\widetilde{V}$ est un sous-$\mathfrak{h}$-module de dimension finie de V. Le premier vecteur d'une base de $\widetilde{V}$ qui trigonalise simultanément les actions de X_1, ..., X_d appartient à $V_\lambda \setminus \{0\}$.

Définition-Proposition

(a) On note $B' = (\varpi_\alpha)_{\alpha\in B}$ la base de $\mathfrak{h}^*$ duale de $(H_\alpha)_{\alpha\in B}$ « poids fondamentaux pour B ».

On a $s_\alpha(R^+\backslash\{\alpha\}) = R^+\backslash\{\alpha\}$ pour tout $\alpha \in B$, donc : $\sum\limits_{\alpha\in B} \varpi_\alpha = \rho$.

(b) On pose : $P := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall\alpha \in R \quad \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}\} = \bigoplus\limits_{\alpha\in B} \mathbb{Z}\,\varpi_\alpha$ « groupe des poids », et,
$P_+ := \{\lambda\in\mathfrak{h}^* \mid \forall\alpha\in B \ \ \lambda(H_\alpha)\in\mathbb{N}\} = \sum\limits_{\alpha\in B} \mathbb{N}\,\varpi_\alpha$ « ensemble des poids dominants ». ← [Bourbaki le note P_{++}]

Ainsi : $\mathbb{N}B \subseteq \mathbb{Z}B \subseteq P$ avec $\mathbb{N}B := \sum\limits_{\alpha\in B} \mathbb{N}\,\alpha$, et $\mathbb{Z}B := \bigoplus\limits_{\alpha\in B} \mathbb{Z}\,\alpha$ « groupe des poids radiciels ».

Définition-Proposition

Soient $\mu \in \mathfrak{h}^*$ et π une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel complexe V.

(a) Un vecteur $v \in V$ est dit *primitif de poids* μ si : $v \neq 0$, $\mathfrak{n}\,v = \{0\}$ et $v \in V_\mu$ (action de $\mathfrak{h}$). Si V est de dimension finie et contient un vecteur primitif v de poids μ, alors : $\mu \in P_+$.

(b) On appelle parfois $\mathfrak{g}$-*module de plus haut poids* μ un $\mathfrak{g}$-module qui est engendré par un vecteur primitif v de poids μ.

Modules de Verma

On utilise les notations du paragraphe précédent.

Définition-Proposition

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

(a) On note : $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}{}^{(*)}$ où $\mathbb{C}_{\lambda-\rho}$ est le $\mathfrak{b}$-module $\mathbb{C}$ pour l'action telle que

$$Hw = (\lambda-\rho)(H)\,w \quad\text{et}\quad Xw = 0 \quad\text{pour}\quad H \in \mathfrak{h},\ X \in \mathfrak{n}, \text{ et } \ w \in \mathbb{C}.$$

Pour tout $x \in M(\lambda)$, il existe $u \in U(\mathfrak{n}^-)$ unique tel que $x = u \cdot (\widehat{1 \otimes 1})$.

(b) Le $\mathfrak{g}$-module « de Verma » $M(\lambda)$ est engendré par le vecteur $1 \otimes 1$ primitif de poids $\lambda - \rho$.

(c) Les éléments z de $\mathrm{Z}(U(\mathfrak{g}))$ opèrent par les homothéties de rapport $\chi_\lambda(z)$ dans $M(\lambda)$.

Proposition 1

Soient $\mu \in \mathfrak{h}^*$, V un $\mathfrak{g}$-module engendré par un vecteur primitif v de poids μ.

(a) Il existe un morphisme surjectif de $\mathfrak{g}$-modules $\varphi\colon M(\mu+\rho) \to V$ tel que $\varphi(1\otimes 1) = v$.

(b) On a : $V = \bigoplus\limits_{\lambda\in\mu-\mathbb{N}B} V_\lambda$ avec $\dim V_\lambda < +\infty$ pour $\lambda \in \mu - \mathbb{N}B$ et $\dim V_\mu = 1$.

(c) On a : $z \cdot x = \chi_{\mu+\rho}(z)\,x$ pour tous $z \in \mathrm{Z}(U(\mathfrak{g}))$ et $x \in V$.

Proposition 2

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

(a) Tout sous-$\mathfrak{g}$-module de $M(\lambda)$ distinct de $M(\lambda)$ est inclus dans $M(\lambda)_+ := \bigoplus\limits_{\lambda'\in\mathfrak{h}^*,\ \lambda'\neq\lambda} M(\lambda)_{\lambda'}$.

(b) Le quotient $L(\lambda)$ de $M(\lambda)$ par la somme des sous-$\mathfrak{g}$-module de $M(\lambda)$ distinct de $M(\lambda)$ est à isomorphisme près l'unique $\mathfrak{g}$-module simple engendré par un vecteur primitif de poids $\lambda - \rho$.

Théorème

(a) L'application $\mu \in P_+ \mapsto L(\mu+\rho)$ fournit une bijection de P_+ sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie. ← [donc par la proposition 2 $\dim L(\mu+\rho) = \infty$ si $\mu \in \mathfrak{h}^* \setminus P_+$]

(b) Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie. On note μ son plus grand poids.

On a : $V_\mu = \{v \in V \mid \forall X \in \mathfrak{n} \quad Xv = 0\}$. De plus, tout poids λ de $\mathfrak{h}$ dans V vérifie : $\dim V_{w\lambda} = \dim V_\lambda$ pour $w \in W(R)$, $\|\lambda\| \leq \|\mu\|$ et $\big(\|\lambda\| = \|\mu\| \iff \lambda \in W(R)\cdot\mu\big)$.

$(*)$ $M(\lambda)$ est l'espace vectoriel $(U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\lambda-\rho})/\operatorname{Vect}(vb\otimes w - v\otimes bw)_{v\in U(\mathfrak{g}),\ b\in U(\mathfrak{b}),\ w\in\mathbb{C}}$ muni de l'action de $U(\mathfrak{g})$ par : $u \cdot (\widehat{v \otimes w}) = \widehat{uv \otimes w}$ pour $u, v \in U(\mathfrak{g})$ et $w \in \mathbb{C}$.