Polynômes symétriques : à retenir (J-Y D)

On fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition-Proposition

(a) Le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, ..., n\}$ opère dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ par :

$$\sigma \cdot P = P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}) \quad \text{quand} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \text{et} \quad P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n].$$

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. On dit que P *est symétrique* si $\sigma \cdot P = P$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
On note $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ la sous-algèbre de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ formée des polynômes symétriques.

(c) Pour tout $p \in \{1, ..., n\}$, on pose : $\Sigma_p = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_p \le n} X_{i_1} ... X_{i_p} \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n}$.
Les polynômes Σ_1, ..., Σ_n s'appellent *les polynômes symétriques élémentaires.*
Par exemple : $\Sigma_1 = X_1 + ... + X_n$ et $\Sigma_n = X_1 ... X_n$.

(d) On a : $\underbrace{(T - X_1) \cdots (T - X_n)}_{\text{sommes de produits de termes } T \text{ ou } -X_i} = T^n - \Sigma_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n \Sigma_n$ dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n, T]$
ce qui montre que $\Sigma_1, ..., \Sigma_n \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

Notations

Soit $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n} \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \setminus \{0\}$.
Le *degré de* P, noté $\deg P$, est le plus grand $d = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ avec $a_\alpha \neq 0$.
Soit $1 \le i \le n$. Le *degré partiel de* P *en* X_i, noté $\deg_i P$, est le plus grand $d_i = \alpha_i$ avec $a_\alpha \neq 0$.
Le *poids de* P, noté $\pi(P)$, est le plus grand $p = \alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + n\alpha_n$ avec $a_\alpha \neq 0$.
On posera : $\deg 0 = \deg_1 0 = ... = \deg_n 0 = \pi(0) = -\infty$.

Théorème

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n}$. On pose : $d = \deg P$ et $d' = \deg_1 P = ... = \deg_n P$.
Il existe $Q \in \mathbb{C}[Y_1, ..., Y_n]$ unique tel que $P(X_1, ..., X_n) = Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$.
Dans ce cas, on a : $\pi(Q) = d$ et $\deg Q = d'$.

DÉMONSTRATION

• Tout d'abord, on remarque que les degrés partiels de P en X_1, ..., X_n sont bien égaux.
Soit en effet $i \in \{1, ..., n\}$. Le polynôme P a un monôme $\lambda X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}$ avec $\lambda \neq 0$ et $\alpha_i = \deg_i P$.
On introduit la transposition $\tau = (1\ i)$. L'égalité $\tau \cdot P = P$ montre que P a un monôme $\lambda X_1^{\alpha'_1} ... X_n^{\alpha'_n}$ avec $\alpha'_1 = \deg_i P$, donc $\deg_1 P \ge \deg_i P$. De même $\deg_i P \ge \deg_1 P$. Finalement : $\deg_i P = \deg_1 P$.

• Ensuite, on remarque que pour tout $Q \in \mathbb{C}[Y_1, ..., Y_n]$, on a :
$\deg \big(Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)\big) \le \pi(Q)$ et $\deg_1 \big(Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)\big) \le \deg Q$, car c'est vrai quand $Q = Y_1^{\beta_1} ... Y_n^{\beta_n}$.

• On note $(\Sigma_p)_0$ le polynôme obtenu à partir de Σ_p en remplaçant X_n par 0.
On a : $(T - X_1) \cdots (T - X_{n-1})(T - 0) = T^n - (\Sigma_1)_0 T^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} (\Sigma_{n-1})_0 T + 0$
donc $(\Sigma_1)_0$, ..., $(\Sigma_{n-1})_0$ sont les polynômes symétriques élémentaires à l'ordre $n - 1$.

• Existence d'un Q avec $\pi(Q) \le d$ et $\deg Q \le d'$? Récurrence sur n.
Pour $n = 1$, on a $\Sigma_1 = X_1$ et donc $Q = P$ convient.
On suppose que $n \ge 2$ et que l'existence est vraie avec $n - 1$ à la place de n.
On se place dans le cas où $P \neq 0$, car $Q = 0$ convient quand $P = 0$.
On raisonne (à n fixé) par récurrence sur le degré d de P. Quand $d = 0$, l'existence est immédiate.
On suppose l'existence d'un Q acquise pour les polynômes de degré $< d$. L'ordre $n - 1$ donne :
$P(X_1, ..., X_{n-1}, 0) = \widetilde{Q}((\Sigma_1)_0, ..., (\Sigma_{n-1})_0)$ avec $\widetilde{Q} \in \mathbb{C}[Y_1, ..., Y_{n-1}]$, $\pi(\widetilde{Q}) \le d$ et $\deg \widetilde{Q} \le d'$.
On pose : $\widetilde{P}(X_1, ..., X_n) = P(X_1, ..., X_n) - \widetilde{Q}(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1})$.

On a : $\widetilde{P}$ est symétrique, $\deg \widetilde{P} \leq d$ et $\deg_1 \widetilde{P} \leq d'$. En outre : $\widetilde{P}(X_1, ..., X_{n-1}, 0) = 0$.
Par symétrie, on en déduit que $\widetilde{P}(X_1, ..., X_{k-1}, 0, X_{k+1}, ..., X_n) = 0$ quand $1 \leq k \leq n$.
Ainsi, en écrivant $\widetilde{P} = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \widetilde{a}_\alpha X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}$, on constate que $\widetilde{a}_\alpha = 0$ quand $\alpha_k = 0$.
D'où : $\widetilde{P} = \sum\limits_{\alpha \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n} \widetilde{a}_\alpha X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n} = \Sigma_n P_1$ avec $P_1 \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, $\deg P_1 \leq d - n$ et $\deg_1 P_1 \leq d' - 1$.
Comme $\Sigma_n (P_1 - \sigma \cdot P_1) = \widetilde{P} - \sigma \cdot \widetilde{P} = 0$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a : P_1 est symétrique.

On applique à P_1 l'hypothèse de récurrence associée au degré des polynômes :
$P_1(X_1, ..., X_n) = Q_1(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ avec $Q_1 \in \mathbb{C}[Y_1, ..., Y_n]$, $\pi(Q_1) \leq d - n$ et $\deg Q_1 \leq d' - 1$.
On récapitule : $P(X_1, ..., X_n) = \Sigma_n Q_1(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) + \widetilde{Q}(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1})$, donc
$P(X_1, ..., X_n) = Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ avec $Q \overset{\text{déf}}{=} Y_n Q_1(Y_1, ..., Y_n) + \widetilde{Q}(Y_1, ..., Y_{n-1})$, $\pi(Q) \leq d$ et $\deg Q \leq d'$.

- Unicité d'un Q ? Récurrence sur n.

Pour $n = 1$, on a $\Sigma_1 = X_1$ et donc le seul Q associé à P est $Q = P$.
On suppose que $n \geq 2$ et que l'unicité est vraie avec $n - 1$ à la place de n.

Soit $Q \in \mathbb{C}[Y_1, ..., Y_n]$ tel que $Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = 0$. A-t-on $Q = 0$?
On décompose Q suivant les puissances de Y_n : $Q = Q_p(Y_1, ..., Y_{n-1}) Y_n^p + ... + Q_0(Y_1, ..., Y_{n-1})$.

On se place, par l'absurde, dans le cas où $Q \neq 0$. Il existe donc l minimal tel que $Q_l \neq 0$.
On pose : $\widetilde{Q} = Q_p(Y_1, ..., Y_{n-1})\, Y_n^{p-l} + ... + Q_l(Y_1, ..., Y_{n-1})$.
On a : $Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = \widetilde{Q}(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)\, \Sigma_n^l = 0$, ce qui donne $\widetilde{Q}(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = 0$.
En remplaçant Y_n par 0 on obtient : $Q_l((\Sigma_1)_0, ..., (\Sigma_n)_0) = 0$.
Cela contredit l'unicité à l'ordre $n - 1$.

Ainsi $Q = 0$. □

Corollaire

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[Y_1, ..., Y_n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n} \\ Q & \longmapsto & Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) \end{array}$ est un isomorphisme d'algèbres.

Théorème (« formules de Newton »)

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose : $S_p = X_1^p + ... + X_n^p \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

On a : $S_p - \Sigma_1 S_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} \Sigma_{p-1} S_1 + (-1)^p\, p\, \Sigma_p = 0$ où $\Sigma_k \overset{\text{déf}}{=} 0$ quand $k > n$.

Démonstration

On part de : $T^n - \Sigma_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n \Sigma_n = (T - X_1) \cdots (T - X_n)$ dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n, T]$.

On remplace T par $\frac{1}{T}$ et multiplie par T^n :

$$1 - \Sigma_1 T + \cdots + (-1)^n \Sigma_n T^n = (1 - X_1 T) \cdots (1 - X_n T).$$

On pose : $\Sigma_0 = 1$. En dérivant par rapport à T puis multipliant par T, on trouve :

$$-\Sigma_1 T + 2\Sigma_2 T^2 + \cdots + (-1)^n n \Sigma_n T^n + (-1)^{n+1}(n+1)\Sigma_{n+1} T^{n+1} + ...$$
$$= T \sum_{i=1}^{n} \Big((-X_i) \prod_{j \neq i} (1 - X_j T) \Big) = -\Big(\sum_{i=1}^{n} \tfrac{X_i T}{1 - X_i T} \Big) \prod_{j=1}^{n} (1 - X_j T) = -\Big(\sum_{i=1}^{n} \tfrac{X_i T}{1 - X_i T} \Big) \Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Sigma_k T^k \Big)$$
$$= -\Big(\sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{j=1}^{+\infty} (X_i T)^j \big) \Big) \Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Sigma_k T^k \Big) = -\Big(\sum_{j=1}^{+\infty} S_j T^j \Big) \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \Sigma_k T^k \Big),$$

où les deux dernières égalités doivent être interprétées dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n][[T]]$.

On conclut en égalisant les coefficients de T^p de part et d'autre. □

Corollaire

Il existe des polynômes $P_1, ..., P_n \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tels que :

$$\Sigma_1 = P_1(S_1, ..., S_n) \quad \text{et} \quad ... \quad \text{et} \quad \Sigma_n = P_n(S_1, ..., S_n).$$