Produit tensoriel : à retenir (J-Y D)

On se donne des anneaux A, B, et un anneau commutatif k.

Définition-Proposition

(a) Une *famille de A-modules (à gauche)* est une application $i \mapsto M_i$ d'un ensemble I dans un ensemble de A-modules à gauche. On notera $(M_i)_{i\in I}$ une telle application.

(b) Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules. On note $\prod\limits_{i\in I} M_i$ l'ensemble des applications $i \mapsto v_i$ de I dans $\bigcup\limits_{i\in I} M_i$ telles que $v_i \in M_i$ pour tout $i \in I$. On note $(v_i)_{i\in I}$ une telle application $i \mapsto v_i$.

On munit l'ensemble $\prod\limits_{i\in I} M_i$ d'une structure de A-module à l'aide des lois suivantes :
$(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} := (v_i + w_i)_{i\in I}$ et $\alpha(v_i)_{i\in I} := (\alpha v_i)_{i\in I}$ pour $\alpha \in A$ et $(v_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} M_i$.

(c) Soient I un ensemble et M un A-module à gauche. L'ensemble, noté M^I, des applications de I dans M est égal à $\prod\limits_{i\in I} M$.

(d) Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules. On note $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ le sous-module de $\prod\limits_{i\in I} M_i$ formé des $(v_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} M_i$ tels que la partie $J := \{i \in I \mid v_i \neq 0\}$ de I est finie. Pour un tel $(v_i)_{i\in I}$, on a :
$(v_i)_{i\in I} = \mathrm{inj}_{i_1}(\underset{\substack{\pitchfork \\ M_{i_1}}}{v_{i_1}}) + \cdots + \mathrm{inj}_{i_1}(\underset{\substack{\pitchfork \\ M_{i_k}}}{v_{i_k}})$ où $\underset{\text{distincts}}{\{i_1, \ldots, i_k\}} := J$ et $\mathrm{inj}_j(\underset{\substack{\pitchfork \\ M_j}}{w}) = (w_i)_{i\in I}$ avec $w_i = \begin{cases} w & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou.

(e) Soient I un ensemble et M un A-module à gauche. L'ensemble, noté $M^{(I)}$, des applications de I dans M nulles en dehors d'un ensemble fini, est égal à $\bigoplus\limits_{i\in I} M$.

Définition

Soit M un A-module à gauche.

(a) Une *famille d'éléments de M* est une application $i \mapsto v_i$ d'un ensemble I dans M.

(b) Soit I un ensemble. Pour toute famille $(v_i)_{i\in I} \in M^{(I)}$ d'éléments de M indexée par I telle que la partie $J := \{i \in I \mid v_i \neq 0\}$ de I est finie, on pose :
$$\sum_{i\in I} v_i := \underset{\text{(indépendant de l'ordre sur } J)}{v_{i_1} + \cdots + v_{i_k}} \quad \text{où} \quad \underset{\text{distincts}}{\{i_1, \ldots, i_k\}} := J.$$

(c) Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de M indexée par un ensemble I.

On dit que $(v_i)_{i\in I}$ *est libre* si pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $\underset{\text{distincts}}{i_1, \ldots, i_k} \in I$, les seuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ tels que $\alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_k v_{i_k} = 0$ sont $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. Cela signifie que $\begin{array}{ccc} A^{(I)} & \to & M \\ (\alpha_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum\limits_{i\in I} \alpha_i v_i \end{array}$ est injective.

On dit que $(v_i)_{i\in I}$ *est génératrice de M* si pour tout $v \in M$, il existe $k \in \mathbb{N}$, $\underset{\text{distincts}}{i_1, \ldots, i_k} \in I$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ tels que : $v = \alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_k v_{i_k}$. Cela signifie que $\begin{array}{ccc} A^{(I)} & \to & M \\ (\alpha_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum\limits_{i\in I} \alpha_i v_i \end{array}$ est surjective.

On dit que $(v_i)_{i\in I}$ est *une base de M* si $(v_i)_{i\in I}$ est libre et génératrice de M.

(d) Soit I un ensemble. L'élément de $A^{(I)}$ qui envoie i_0 sur 1 et les autres $i \in I \backslash \{i_0\}$ sur 0 sera encore noté i_0. Ainsi, la famille $(i)_{i\in I}$ est une base de $A^{(I)}$, appelée *base canonique de $A^{(I)}$*.

(e) On dit que M est un A-module libre s'il existe une famille $(v_i)_{i\in J}$ qui est une base de M. Cela signifie qu'il existe un ensemble I et un morphisme de A-modules bijectif de $A^{(I)}$ sur M.

Définition-Proposition

Soient M un A-module à droite et N un A-module à gauche. On suppose $\overbrace{k}^{\text{commutatif}}$ sous-anneau de A.

(a) Soit P un k-module. On dit qu'une application $f\colon M \times N \to P$ est *k-bilinéaire* si :

$$f(x\alpha + x'\alpha', y) = \alpha f(x,y) + \alpha' f(x',y) \;\text{ et }\; f(x, \beta y + \beta' y') = \beta f(x,y) + \beta' f(x,y')$$

pour tous $\alpha, \alpha'\beta, \beta' \in k$, $x, x' \in M$ et $y, y' \in N$,.

(b) On note $M \otimes_A N$ le $\mathbb{Z}$-module quotient de $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ par le sous-module engendré par les éléments d'une des deux formes suivantes : $(x+x', y+y') - (x,y) - (x',y) - (x,y') - (x',y')$ avec $x, x' \in M$ et $y, y' \in N$ d'une part, et, $(x\alpha, y) - (x, \alpha y)$ avec $\alpha \in A$, $x \in M$ et $y \in N$ d'autre part.

Soit $(x_0, y_0) \in M \times N$. On note $x_0 \otimes y_0$ la projection dans $M \otimes_A N$ de $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^{(M\times N)}$. On pose : $i(x_0, y_0) = x_0 \otimes y_0$. Ainsi le $\mathbb{Z}$-module $M \otimes_A N$ est engendré par $(x \otimes y)_{(x,y)\in M\times N}$.

(c) L'application i est $\mathbb{Z}$-bilinéaire telle que $i(x\alpha, y) = i(x, \alpha y)$ pour $\alpha \in A$, $x \in M$ et $y \in N$. Pour toute application $\mathbb{Z}$-bilinéaire f de $M \times N$ dans un $\mathbb{Z}$-module P telle que $f(x\alpha, y) = f(x, \alpha y)$ pour $\alpha \in A$, $x \in M$ et $y \in N$, il existe une application $\mathbb{Z}$-linéaire unique $\overline{f}\colon M \otimes_A N \to P$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & P \\ & M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Proposition

On se donne un A-module à gauche M qui a une structure de B-module à droite telle que :

$$\alpha(x\beta) = (\alpha x)\beta \;\text{ pour tous } \alpha \in A,\ x \in M, \text{ et } \beta \in B.$$

(a) Soit N un B-module à gauche.

L'ensemble $M\otimes_B N$, muni de l'addition et de l'application $(\alpha, x\otimes y) \in A\times(M\otimes_B N) \mapsto (\alpha x)\otimes y$ est un A-module à gauche. On précise : $\alpha v := \overline{f_\alpha}(v)$ où $f_\alpha\underbrace{(x,y)}_{\in M\times N} := (\alpha x)\otimes y$ ($\alpha \in A$ et $v \in M\otimes_B N$).

(b) Soit N un A-module à gauche.

L'ensemble $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ des applications A-linéaires M dans N, muni de l'addition et de l'application $(\beta, f) \in B \times \mathrm{Hom}_A(M,N) \mapsto f(\,\cdot\,\beta)$, est un B-module à gauche.

Le B-module à gauche $M^* := \mathrm{Hom}_A(M,A)$ est un A-module à droite par $(l,\alpha)\in M^*\times A \mapsto l(\cdot)\,\alpha$, et l'application $l\otimes y \in M^*\otimes_A N \mapsto l(\cdot)\,y \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ est un morphisme de B-modules.

Proposition (cas commutatif, cf. $A = B = k$ ci-dessus)

On se donne des k-modules M, N, M', N'.

(a) Le groupe $(M\otimes_k N, +)$ est un k-module avec $\alpha(x\otimes y)$ à la fois égal à $(\alpha x)\otimes y$ et à $x\otimes(\alpha y)$ pour $\alpha \in k$ et $(x,y) \in M \times N$.

(b) Le groupe $(\mathrm{Hom}_k(M,N), +)$ est un k-module avec αf à la fois égal à $v \in M \mapsto f(\alpha v)$ et à $v \in M \mapsto \alpha f(v)$ pour $\alpha \in k$ et $f \in \mathrm{Hom}_k(M,N)$.

(c) L'application $i\colon (x,y) \in M \times N \mapsto x \otimes y \in M \otimes_k N$ est k-bilinéaire. Pour toute application k-bilinéaire f de $M \times N$ dans un k-module P, il existe une application k-linéaire unique $\overline{f}\colon M \otimes_k N \to P$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & P \\ & M \otimes_k N \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

(d) Soient $u\colon M \to M'$ et $v\colon N \to N'$ deux applications k-linéaires.

Il existe une unique application k-linéaire $u\otimes v\colon M\otimes_k N \to M'\otimes_k N'$ telle que :

$$(u\otimes v)(x\otimes y) = u(x)\otimes v(y) \;\text{ pour tous } x \in M \text{ et } y \in N.$$

Proposition (cas commutatif)

On se donne des k-modules M, N, et P.

(a) On dispose d'isomorphismes canoniques de k-modules écrits comme des « identifications » :

$$M\otimes_k N = N\otimes_k M \;\text{ et }\; (M\otimes_k N)\otimes_k P = M\otimes_k (N\otimes_k P) \overset{\text{notation}}{=} M\otimes_k N\otimes_k P.$$

(b) On suppose que M a une base $(v_i)_{i\in I}$ et N a une base $(w_j)_{j\in J}$.

Dans ce cas, le k-module $M\otimes_k N$ admet pour base $(v_i\otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$.