Représentations des algèbres de Lie : à retenir (J-Y D)

On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Définition-Proposition

(a) On note $\mathscr{I}$ l'idéal de $T(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ avec $X, Y \in \mathfrak{g}$.
On appelle *algèbre enveloppante de* $\mathfrak{g}$ la $\mathbb{K}$-algèbre associative unifère quotient $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/\mathscr{I}$.

(b) L'application $i\colon \begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \to & U(\mathfrak{g}) \\ X & \mapsto & \dot{\widehat{X}} \end{array}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $(U(\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot])$.

Pour tout morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Lie f de $\mathfrak{g}$ dans une $\mathbb{K}$-algèbre associative unifère A munie de $(x, y) \mapsto x.y - y.x$, il existe un unique morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres unifère $\overline{f}\colon U(\mathfrak{g}) \to A$ tel que le diagramme
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & U(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$
commute (« propriété universelle de $U(\mathfrak{g})$ »).

Exemples

(a) Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni du crochet nul. Par construction, on a : $U(V) = S(V)$.

(b) Soit I un ensemble. L'injection canonique de $L((X_i)_{i\in I})$ dans $T(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}X_i)$ vérifie la propriété universelle qui caractérise $U(L((X_i)_{i\in I}))$ « à isomorphisme près ».

Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

(a) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ avec I totalement ordonnée.

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $U(\mathfrak{g})$ admet pour base la famille formée des $\dot{\widehat{X_{i_1}}}^{\alpha_1} \ldots \dot{\widehat{X_{i_n}}}^{\alpha_n}$ quand $n \in \mathbb{N}$ et $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$ vérifient $i_1 < \cdots < i_n$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$, où $\dot{\widehat{X_{i_1}}}^{\alpha_1} \ldots \dot{\widehat{X_{i_n}}}^{\alpha_n} = 1$ lorsque $n = 0$.

(b) L'application canonique i de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$ est donc $\underbrace{\text{injective}}_{\text{on écrira « } \mathfrak{g} \subseteq U(\mathfrak{g}) \text{ »}}$ puis $\mathfrak{g}$ engendre l'algèbre $U(\mathfrak{g})$.

Définition-Proposition

Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre associative unifère et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(a) On appelle $\mathfrak{g}$-*module (à gauche)* tout $U(\mathfrak{g})$-module (à gauche).
On appelle $\mathfrak{g}$-*module à droite* tout $U(\mathfrak{g})$-module à droite.

(b) On appelle *représentation de* A *dans* V un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres unifère π de A dans l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(V)$ des endomorphismes de V. On note : $\dim \pi := \dim V$.

La donnée d'une représentation π de A dans V équivaut à la donnée d'une structure de A-module à gauche $(a, v) \in A \times V \mapsto av$ sur V qui est $\mathbb{K}$-bilinéaire, par la formule « $\pi(a)(v) = av$ » pour $a \in A$ et $v \in V$.

(c) On appelle *représentation d'algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$ *dans* V un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres π de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes de V. On note : $\dim \pi := \dim V$.

Les représentations d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ dans V sont en bijection avec les représentations de la $\mathbb{K}$-algèbre $U(\mathfrak{g})$ par l'application $\pi \mapsto \overline{\pi}$ fournie par la propriété universelle de $U(\mathfrak{g})$.

D'après (b), la donnée d'une représentation π de $\mathfrak{g}$ dans V équivaut donc à la donnée d'une structure de $U(\mathfrak{g})$-module à gauche $(u, v) \in U(\mathfrak{g}) \times V \mapsto uv$ sur V qui est $\mathbb{K}$-bilinéaire, par la formule « $\pi(X)(v) = Xv$ » pour $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$.

(d) Les structures de $\mathfrak{g}$-module à gauche $(u, v) \mapsto u \cdot_g v$ et de $\mathfrak{g}$-module à droite $(u, v) \mapsto u \cdot_d v$ sur un groupe commutatif $(E, +)$ sont en bijection par : $X \cdot_d v = -Xu \cdot_g v$ pour $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in E$.

Définition-Proposition

Soient G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(a) On pose : $\mathbb{K}[G] := \mathbb{K}^{(G)} = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K} e_g$ où e_{g_0} envoie g_0 sur 1 et les $g \neq g_0$ sur 0.
On munit $\mathbb{K}[G]$ d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre associative unifère par : $e_g e_h = e_{gh}$ pour $g, h \in G$.

(b) On appelle *représentation du groupe G dans V* un morphisme de groupes $\rho \colon G \to GL_{\mathbb{K}}(V)$.

La donnée d'une représentation ρ de G dans V équivaut à la donnée d'une structure de $\mathbb{K}[G]$-module à gauche $(u, v) \in \mathbb{K}[G] \times V \mapsto uv$ sur V qui est $\mathbb{K}$-bilinéaire, par « $\rho(g)(v) = gv$ » pour $g \in G$ et $v \in V$.

(c) Pour toute représentation ρ de G dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie V, qui est C^∞ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et holomorphe quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\pi := \mathrm{Lie}\,\rho$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V.

Exemples

On se donne des $\mathfrak{g}$-modules V et W.

(a) Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V avec l'application nulle de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(V)$ est un $\mathfrak{g}$-module (« trivial »).

(b) L'application $\mathrm{ad} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ (« représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ »).

(c) L'espace vectoriel $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$ muni de $(Xf)(v) := -f(Xv) + Xf(v)$ est un $\mathfrak{g}$-module.

(d) En particulier, l'espace vectoriel V^* muni de $(Xf)(v) := -f(Xv)$ est un $\mathfrak{g}$-module « représentation contragrédiente de celle de $\mathfrak{g}$ dans V ».

(e) L'espace vectoriel $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ muni de $X(v \otimes w) := (Xv) \otimes w + v \otimes (Xw)$ est un $\mathfrak{g}$-module.
L'injection canonique $l \otimes w \in V^* \otimes_{\mathbb{K}} W \mapsto l(\cdot)\, w \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules.

Notation

Soit V un $\mathfrak{g}$-module.
On dit qu'un vecteur $v \in V$ est $\mathfrak{g}$-invariant si $Xv = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.
On note $V^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments $\mathfrak{g}$-invariants de V.

Définition-Proposition

On se donne un anneau A et un A-module V.

(a) On dit que V est *simple* s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :
(i) $V \neq \{0\}$ et tout sous-module non-nul de V est égal à V ;
(ii) $V \neq \{0\}$ et tout vecteur non-nul de V engendre V.

(b) On dit que V est *semi-simple* s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :
(i) V est somme de sous-modules simples ;
(ii) V est somme directe de sous-modules simples ;
(iii) tout sous-module de V a un supplémentaire.

Définition-Proposition

On suppose ici que $\mathfrak{g}$ est de dimension finie.
Soit B une forme bilinéaire $\mathfrak{g}$-invariante non-dégénérée sur $\mathfrak{g}$.
L'application $\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} & \to & \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \\ X \otimes Y & \mapsto & B(\cdot, X)Y \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules qui se restreint en un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

En composant cet isomorphisme avec la projection canonique de $T(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{g})$, on obtient à partir de $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ un élément du centre de $U(\mathfrak{g})$ « élément de Casimir associé à B ».

Théorème de Hermann Weyl

On suppose que $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie est semi-simple.