Revêtements : à retenir (J-Y D)

Les variétés et groupes de Lie sont ici sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Revêtements des variétés

1. Revêtement

Un revêtement est une application continue $p : X \to B$ entre espaces topologiques, telle que : p est surjective et pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert V de b dans B pour lequel $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{j \in J} \underset{\substack{\text{ouverts} \\ \text{disjoints de } X}}{U_j}$ où les $p_{|U_j}$ sont des homéomorphismes de U_j sur V.

Dans ce cas, l'application « degré » $b \in B \mapsto \mathrm{Card}\big(p^{-1}(\{b\})\big) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ est continue.

2. Groupe fondamental (cf. P. Dolbeault *Analyse complexe.* Masson, 1990, p. 120)

• Le groupe fondamental d'un espace topologique A en un point $a \in A$ est le groupe :

$$\Pi_1(A, a) = \Big\{\text{classes d'équivalence } [\gamma] \text{ pour } \sim \text{ des } \gamma : [0,1] \to A \text{ continues avec } \gamma(0) = \gamma(1) = a\Big\}$$

où $\gamma_0 \sim \gamma_1 \overset{\text{déf}}{\iff} \exists c : \begin{array}{rcl} [0,1] \times [0,1] & \to & A \\ (s,t) & \mapsto & c_s(t) \end{array}$ continue $\begin{cases} \forall s \in [0,1] \quad c_s(0) = c_s(1) = a \\ c_0 = \gamma_0 \text{ et } c_1 = \gamma_1 \end{cases}$

pour la loi $[\gamma] \cdot [\delta] = \left[t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) \text{ si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \delta(2t-1) \text{ si } \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}\right]$, et donc $[\gamma]^{-1} = \big[t \mapsto \gamma(1-t)\big]$.

• Soient A' et A'' des espaces topologiques, $a' \in A'$ et $a'' \in A''$.

L'application $\begin{array}{rcl} \Pi_1(A' \times A'', (a', a'')) & \to & \Pi_1(A', a') \times \Pi_1(A'', a'') \\ [\gamma] & \mapsto & \big([\mathrm{pr}_1 \circ \gamma], [\mathrm{pr}_2 \circ \gamma]\big) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

• Un espace topologique A est dit *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et vérifie $\Pi_1(A, a) = \{1\}$ pour tout $a \in A$ (il suffit qu'il existe $a_0 \in A$ tel que $\Pi_1(A, a_0) = \{1\}$).

3. Théorème (cf. P. Dolbeault *Analyse complexe.* Masson, 1990, p. 104 et p. 121)

(a) Soient A un espace topologique localement connexe par arcs et simplement connexe, B un espace topologique, et $f : A \to B$ une application continue. Dans ce cas, on a :

$(\star)$ | pour tout revêtement $p : X \to B$ et tous $a \in A$ et $x \in X$ tels que $f(a) = p(x)$, il existe une unique application continue $\widetilde{f} : A \to X$ telle que
$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$ commute et $\widetilde{f}(a) = x$.

(b) Soit M une variété connexe. Il existe une variété simplement connexe $\widetilde{M}$ et un revêtement $\widetilde{p} : \widetilde{M} \to M$ immersion de variétés (donc $\widetilde{p}$ est un difféomorphisme local).

4. Définition-Proposition

Soit B une variété connexe. On appelle *revêtement universel de B* (au sens des variétés) tout revêtement $f : A \to B$ avec A connexe et f immersion qui satisfait l'une des conditions équivalentes :

(i) $(\star)$ est vérifiée ;

(ii) A est simplement connexe ;

(iii) tout revêtement $p : X \to A$ avec X connexe est un homéomorphisme.

Dans ce cas, le théorème (b) montre que les autre revêtements universels de A sont les applications $f \circ u^{-1}$ où u est un difféomorphisme de A sur une autre variété.

Revêtements des groupes de Lie

On fixe un groupe de Lie connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposition

Un morphisme de groupes de Lie $p\colon \widetilde{G} \to G$ est un revêtement si et seulement si $\operatorname{Lie} p$ est bijectif.

Théorème

(a) Il existe un morphisme de groupes de Lie $\widetilde{p}\colon \widetilde{G} \to G$ qui est un revêtement universel.
En particulier, $\widetilde{G}$ est un groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ isomorphe à $\mathfrak{g}$.

(b) Pour tout groupe de Lie H d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et tout morphisme d'algèbres de Lie $\varphi\colon \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{h}$, il existe un unique morphisme de groupes de Lie $f\colon \widetilde{G} \to H$ tel que $\operatorname{Lie} f = \varphi$.

Description du groupe fondamental d'un groupe de Lie

Soient G un groupe de Lie connexe, $\widetilde{G}$ un groupe de Lie simplement connexe, et $\widetilde{p}\colon \widetilde{G} \to G$ un morphisme de groupes de Lie tel que $\operatorname{Lie} p$ est bijectif (revêtement universel de G).

Proposition

(a) Le sous-groupe $D := \operatorname{Ker} \widetilde{p}$ de $\widetilde{G}$ est discret et inclus dans le centre $\mathrm{Z}(\widetilde{G})$ de $\widetilde{G}$.

(b) L'application $\begin{array}{rcl} \phi\colon D & \to & \Pi_1(G, 1_G) \\ d & \mapsto & [\widetilde{p} \circ \widetilde{c}] \end{array}$, définie indépendamment du choix pour chaque d d'une application $\widetilde{c}\colon [0,1] \to \widetilde{G}$ continue vérifiant $\widetilde{c}(0) = 1_{\widetilde{G}}$ et $\widetilde{c}(1) = d$, est un isomorphisme de groupes.

Techniques de récurrence

Soient G un groupe de Lie et H un sous-groupe de Lie de G.

Proposition

(a) On suppose H et G/H connexes. Alors G est connexe.

(b) On suppose H et G/H simplement connexes. Alors G est simplement connexe.