Produit semi-direct : à retenir (J-Y D)

On fixe $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Produit d'algèbres de Lie et de groupes de Lie

(a) Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ des algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$.

L'algèbre de Lie produit de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_2$ muni de la loi suivante :
$$[(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)]:=([X_1,Y_1],[X_2,Y_2]) \text{ pour } X_1,Y_1\in\mathfrak{g}_1 \text{ et } X_2,Y_2\in\mathfrak{g}_2.$$

(b) Soient G_1 et G_2 des groupes de Lie sur $\mathbb{K}$.

Le groupe de Lie produit de G_1 et G_2 est la variété $G_1\times G_2$ muni de la loi du groupe produit :
$$(g_1,g_2)(h_1,h_2):=(g_1h_1,g_2h_2) \text{ pour } g_1,h_1\in G_1 \text{ et } g_2,h_2\in G_2.$$

De plus $\begin{array}{ccc}(\operatorname{Lie}G_1)\times(\operatorname{Lie}G_2) & \to & \operatorname{Lie}(G_1\times G_2)\\ (X_1,X_2) & \mapsto & \operatorname{Lie}(\operatorname{inj}_1)(X_1)+(\operatorname{Lie}\operatorname{inj}_2)(X_2)\end{array}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, en notant inj_1 et inj_2 les injections canoniques de G_1 et G_2 dans $G_1\times G_2$.

Produit semi-direct d'algèbres de Lie

Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{h}$ des $\mathbb{K}$-algèbres de Lie.
On note $\operatorname{Der}\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre $\mathfrak{n}$.

(a) On suppose que $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{h}$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.
On dit que $\mathfrak{g}$ *est produit semi-direct interne de $\mathfrak{h}$ par $\mathfrak{n}$*, ce qui se notera $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}\rtimes\mathfrak{h}$, si :
$\underbrace{\mathfrak{n}\text{ est un idéal de }\mathfrak{g}}_{\text{(noté « }\mathfrak{n}\lhd\mathfrak{g}\text{ »)}}$ et tout $A\in\mathfrak{g}$ s'écrit de manière unique $A=X+Y$ avec $X\in\mathfrak{n}$ et $Y\in\mathfrak{h}$.

Dans ce cas, l'application $\Phi\colon Y\in\mathfrak{h}\mapsto(\operatorname{ad}Y)|_{\mathfrak{n}}\in\operatorname{Der}\mathfrak{n}$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

(b) On se donne un morphisme d'algèbres de Lie $\Phi\colon\mathfrak{h}\to\operatorname{Der}(\mathfrak{n})$.

L'espace vectoriel $\mathfrak{n}\times\mathfrak{h}$ a une unique structure d'algèbre de Lie, notée $\mathfrak{n}\rtimes_\Phi\mathfrak{h}$, qui prolonge celles de $\mathfrak{n}\overset{\text{can}}{=}\mathfrak{n}\times\{0\}$ et $\mathfrak{h}\overset{\text{can}}{=}\{0\}\times\mathfrak{h}$, telle que : $(\operatorname{ad}Y)(X)=\Phi(Y)(X)$ pour $X\in\mathfrak{n}$ et $Y\in\mathfrak{h}$.

Dans ce cas, on a : $\mathfrak{n}\rtimes_\Phi\mathfrak{h}=\mathfrak{n}\rtimes\mathfrak{h}$.

Produit semi-direct de groupes de Lie

Soient G, N et H des groupes de Lie sur $\mathbb{K}$.
On note $\operatorname{Aut}_{\mathrm{gr}}(N)$ le groupe des morphismes de groupes bijectifs de N sur N.

(a) On suppose que N et H sont des sous-groupes de Lie de G.
On dit que G *est produit semi-direct interne de H par N*, ce qui se notera $G=N\rtimes H$, si :
$\underbrace{N\text{ est distingué dans }G}_{\text{(noté « }N\lhd G\text{ »)}}$ et tout $g\in G$ s'écrit de manière unique $g=xy$ avec $x\in N$ et $y\in H$.

Dans ce cas, l'application $\varphi\colon h\in H\mapsto(\operatorname{int}h)|_N\in\operatorname{Aut}_{\mathrm{gr}}(N)$ est un morphisme de groupes.

(b) On se donne un morphisme de groupes $\varphi\colon H\to\operatorname{Aut}_{\mathrm{gr}}(N)$ tel que $\begin{array}{ccc}H\times N & \to & N\\ (y,x) & \mapsto & \varphi(y)(x)\end{array}$ est un morphisme de variétés.

La variété $N\times H$ a une unique structure de groupe de Lie, notée $N\rtimes_\varphi H$, dont le produit prolonge ceux de $N\overset{\text{can}}{=}N\times\{1\}$ et de $H\overset{\text{can}}{=}\{1\}\times H$, tel que $(\operatorname{int}y)(x)=\varphi(y)(x)$ pour $x\in N$ et $y\in H$.

Dans ce cas, on a $N\rtimes_\varphi H=N\rtimes H$.

De plus : $\begin{array}{ccc}(\operatorname{Lie}N)\rtimes_\Phi(\operatorname{Lie}H) & \overset{\text{alg. de Lie}}{\sim} & \operatorname{Lie}(N\rtimes_\varphi H)\\ (X,Y) & \longmapsto & X+Y\end{array}$ avec $\Phi:=\operatorname{Lie}\begin{pmatrix}H\to\operatorname{Aut}_{\mathrm{alg}}(\operatorname{Lie}N)\\ y\mapsto\operatorname{Lie}(\varphi(y))\end{pmatrix}$.

Théorème de Levi-Mal'cev pour les algèbres de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.
On note $\mathfrak{r}$ le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ (« radical de $\mathfrak{g}$ »).
On note $\operatorname{int}\mathfrak{g}$ le sous-groupe de $GL(\mathfrak{g})$ engendré par les $\exp(\operatorname{ad} X)$, $X \in \mathfrak{g}$.(*)

(a) On appelle *sous-algèbre de Levi de* $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie semi-simple maximale de $\mathfrak{g}$.

(b) On a : $\boxed{\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{l}}$ pour chaque sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{g}$ (il en existe).
Les autres sous-algèbres de Levi de $\mathfrak{g}$ sont les $g(\mathfrak{l})$, où g décrit $\operatorname{int}\mathfrak{g}$.

Définition-Proposition

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

(a) On appelle *sous-groupe algébrique de* $GL(n, \mathbb{K})$ tout sous-groupe G de $GL(n, \mathbb{K})$ de la forme
$$G = \{g \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \forall i \in I \;\; P_i(g) = 0\}$$
où $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions polynomiales par rapport aux n^2 coefficients des matrices.
Dans ce cas, G est un sous-groupe de Lie sur $\mathbb{K}$ de $GL(n, \mathbb{K})$.

(b) Soit U un sous-groupe algébrique de $GL(n, \mathbb{K})$.
On dit que U est *unipotent* si pour tout $u \in U$ la matrice $u - I$ est nilpotente.

Dans ce cas, l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ a une base $\mathscr{B}$ telle que les matrices $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}\, u$, $u \in U$, sont triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale.
En particulier, le groupe de Lie U est connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ nilpotente. ← [on a $\exp \mathfrak{u} = U$]

(d) Soit G un sous-groupe algébrique de $GL(n, \mathbb{K})$.
Il existe un plus grand sous-groupe algébrique unipotent de $GL(n, \mathbb{K})$ qui est inclus dans G.

(e) Soit H un sous-groupe algébrique de $GL(n, \mathbb{K})$.
On dit que H est *algébriquement réductif* si l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H s'écrit $\mathfrak{h} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}$ (somme directe d'espaces vectoriels) avec $\mathfrak{s}$ algèbre de Lie semi-simple et $\mathfrak{z}$ algèbre de Lie commutative dont les éléments commutent avec ceux de $\mathfrak{s}$ et sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

Théorème de Mostow pour les groupes linéaires algébriques

Soit G un sous-groupe algébrique de $GL(n, \mathbb{K})$ ($n \in \mathbb{N}$).
On note U le plus sous-groupe unipotent de G (« radical unipotent de G »).

(a) On appelle *facteur réductif de* G un sous-groupe algébriquement réductif maximal de G.

(b) On a : $\boxed{G = U \rtimes H}$ pour chaque facteur réductif U de G (il en existe).
Les autres facteurs réductifs de G sont les $(\operatorname{int} g)(H)$, où g décrit G.

(∗) Le groupe $\operatorname{int}\mathfrak{g}$ est égal à $\operatorname{Ad} G$ lorsque G est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.