Différentielle, formules de Taylor : à retenir (J-Y D)

Soient E, E_1, ..., E_l et F, F_1, ..., F_m, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
On fixe des bases $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_p)$ de E, $\mathscr{C} = (v_1, \dots, v_q)$ de F, et $\mathscr{D} = (w_1, \dots, w_r)$ de G.

Définition-Proposition

On considère une application $f \colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ et $a \in U$.

(a) On dit que f est *différentiable en a* s'il existe $l \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que
$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + l(h) + o(\|h\|). \longleftarrow \left[\text{signifie ici : } \lim_{\substack{h\to 0\\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a) - l(h)}{\|h\|} = 0\right]$$
Dans ce cas, on note $\mathrm{d}f(a) := l$ (unique) et obtient :
$$f \text{ est continue en } a \text{ et } \underbrace{\mathrm{d}f(a)(h)}_{\text{noté } \mathrm{d}f(a)\cdot h} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \quad \text{pour tout } h \in E, \quad \longleftarrow [\mathrm{d}f(a)\cdot h = f'(a)\, h \text{ si } E = \mathbb{R}]$$
puis on appelle *dérivées partielles de f en a* les vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{f(a+tu_j) - f(a)}{t}$ quand $1 \leq j \leq p$.

(b) On dit que f *est différentiable* si elle est différentiable en tout point de U.
Dans ce cas, on appelle *différentielle de f* l'application $\mathrm{d}f \colon x \in U \mapsto \mathrm{d}f(x) \in \mathscr{L}(E, F)$.

On définit par récurrence l'ensemble des applications n-fois différentiables de U dans F ($n \in \mathbb{N}$).
On dit que f *est de classe C^n* quand f est n-fois différentiable et $\mathrm{d}^n f$ est continue.

Exemple

Toute application linéaire (continue) $l \colon E \to F$ est différentiable et $\mathrm{d}l(a) = l$ pour tout $a \in E$.

Proposition

a) Si une application $\overbrace{f \colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F \text{ est différentiable en un point } a \text{ de } U}^{\text{signifie que } \tilde{f} \colon (x_1, \dots, x_p) \mapsto (f_1(x), \dots, f_q(x)) \text{ est diff. en } (a_1, \dots, a_p), \text{ où } x = x_1u_1 + \dots + x_pu_p \text{ et } a = a_1u_1 + \dots + a_pu_p}$, elle vérifie :
$$\overbrace{\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\, \mathrm{d}f(a)}^{\mathfrak{Mat}_{\text{bases can.}} \mathrm{d}\tilde{f}(a_1, \dots, a_p)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq q\\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{où} \quad \underset{/\mathscr{C}}{f(x)} \left| \begin{matrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{matrix}\right. \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_i(a + tu_j)\big|_{t=0}}.$$
D'où : $\boxed{\mathrm{d}f(a)\cdot h = \left(\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right) f\right)(a)}$ pour $h = h_1u_1 + \dots + h_pu_p \in E$.

complément au cours

(b) Une application $f \colon \underset{\text{ouvert de } E_1 \times \dots \times E_l}{U} \longrightarrow F_1 \times \dots \times F_m$ est différentiable
$$(x_1, \dots, x_l) \longmapsto \big(f_1(x_1, \dots, x_l), \dots, f_m(x_1, \dots, x_l)\big)$$
en $a = (a_1, \dots, a_l) \in E_1 \times \dots \times E_l$ si et seulement si f_1, ..., f_m sont différentiables en a.

Dans ce cas, on a : $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_l f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \cdots & \partial_l f_m(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_l \end{pmatrix}$ pour $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_l \end{pmatrix} \in E_1 \times \dots \times E_l$

où $\partial_j f_i(a)$ est la différentielle en a_j de l'application $x_j \mapsto f_i(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_l)$.

(c) Soient $f \colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ différentiable en $a \in U$ et $g \colon \underset{\substack{\text{ouvert de } F\\ \text{contenant } f(U)}}{V} \longrightarrow G$ différentiable en $f(a)$.

L'application $g \circ f$ est différentiable en a, avec :

$\boxed{\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)}$ ce qui donne matriciellement $\dfrac{\partial \overbrace{z_i}^{\text{coordonnées de } z = g(y)}}{\partial \underbrace{x_j}_{\text{coordonnées dans } E}} = \sum\limits_{k=1}^{q} \dfrac{\partial z_i}{\partial \underbrace{y_k}_{\text{coordonnées dans } F}} \dfrac{\partial \overbrace{y_k}^{\text{coordonnées de } y = f(x)}}{\partial x_j}$

(en se plaçant aux points adéquats) pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq p$.

Proposition

On considère une application $f \colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$, $a \in U$, et $n \geq 1$.

(a) On suppose que f est différentiable et que $\mathrm{d}^2 f(a)$ est définie.
Dans ce cas : $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$ pour tous $i, j \in \{1, .., p\}$ (« théorème de Schwarz »).

(b) On a : $\boxed{f \text{ est de classe } \mathrm{C}^n \text{ si et seulement si } f \text{ a des dérivées partielles } n^{\text{èmes}} \text{ continues}}$.

complément au cours

Proposition

On se donne une application m-linéaire $\pi\colon \begin{array}{ccc} F_1\times\cdots\times F_m & \to & G \\ (y_1,\ldots,y_m) & \mapsto & y_1\bullet\cdots\bullet y_m\end{array}$ (« produit »).

Si des applications $f_k\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F_k$ avec $1\le k\le m$ sont différentiables en a, alors l'application $f_1\bullet\ldots\bullet f_m\colon \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f_1(x)\bullet\ldots\bullet f_m(x)\end{array}$ est différentiable en a, et pour tout $h\in E$ on a :

$$\boxed{\mathrm{d}(f_1\bullet\ldots\bullet f_m)(a)\cdot h \;=\; (\mathrm{d}f_1(a)\cdot h)\bullet f_2(a)\bullet\ldots\bullet f_m(a) \;+\;\cdots\;+\; f_1(a)\bullet\ldots\bullet f_{m-1}(a)\bullet(\mathrm{d}f_m(a)\cdot h)}.$$

Exemple (généralisable au cas de la différentielle $n^{\text{ème}}$)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U}\longrightarrow F$ deux fois différentiable, $a\in U$ et $h,k\in E$.

On calcule $(\mathrm{d}^2 f(a)\cdot h)\cdot k$ en différentiant $\mathrm{d}f(x)\bullet k$ au point $x=a$ et prenant la valeur en h :

$(\mathrm{d}^2 f(a)\cdot h)\cdot k = \big((h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_p\frac{\partial}{\partial x_p})(k_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+k_p\frac{\partial}{\partial x_p})f\big)(a)$ pour $h=\sum\limits_{j=1}^{p} h_j u_j\in E$ et $k=\sum\limits_{j=1}^{p} k_j u_j\in E$.

Proposition (« inégalité des accroissements finis ») ⟵[il n'y a pas de « théorème des accroissements finis » ici]

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U}\longrightarrow F$ différentiable, $a\in U$ et $h\in E$.

Si $[a,a+h]\subseteq U$, on a : $\boxed{\|f(a+h)-f(a)\|\le \underbrace{\sup_{0\le t\le 1}\|\mathrm{d}f(a+th)\|}_{\le+\infty}\times\|h\|}$.

En particulier, quand U est connexe : f est constante si et seulement si $\mathrm{d}f=0$.

hors programme

Théorème (« convergence uniforme + différentiabilité »)

Soient $f_n\colon \underset{\text{ouvert convexe de } E}{U}\longrightarrow F$, $n\in\mathbb{N}$, des applications vérifiant :

(i) les applications f_n, $n\in\mathbb{N}$ sont différentiables ;
(ii) il existe $x_0\in U$ tel que la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\ge 0}$ converge ;
(iii) la suite $(\mathrm{d}f_n)_{n\ge0}$ converge uniformément.

Alors $(f_n)_{n\ge0}$ converge uniformément sur toute partie bornée B de U, vers une fonction différentiable f telle que : $\mathrm{d}f(x)\cdot h=\big(\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{d}f_n(x)\big)\cdot h=\lim\limits_{n\to+\infty}(\mathrm{d}f_n(x)\cdot h)$ pour $x\in U$ et $h\in E$.

Théorème (« théorème de Taylor-Young »)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U}\longrightarrow F$ $n-1$-fois différentiable ($n\ge1$), et $a\in U$ tel que $\mathrm{d}^n f(a)$ est définie.

On a : $\boxed{f(a+h)\underset{h\to0}{=} f(a)+\frac{\mathrm{d}f(a)}{1!}\cdot h+\cdots+\frac{\mathrm{d}^n f(a)}{n!}\cdot h^n+o\big(\|h\|^n\big)}$ (avec unicité du DL_n),

où $\mathrm{d}^n f(a)\cdot h^n := (\ldots(\underbrace{\mathrm{d}^n f(a)}_{\text{application } n\text{-linéaire symétrique de } E \text{ dans } F}\cdot h)\ldots)\cdot h=\Big(\underbrace{(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_p\frac{\partial}{\partial x_p})^n}_{\text{à développer par la formule du binôme}} f\Big)(a)$ quand $\underset{/\mathscr{B}}{h}\left|\begin{array}{l} h_1\\ \vdots\\ h_p\end{array}\right.\in E$.

Théorème (« inégalité de Taylor-Lagrange ») ⟵[il n'y a pas de « théorème de Taylor-Lagrange » ici]

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U}\longrightarrow F$ $n+1$-fois différentiable ($n\ge0$), $a\in U$ et $h\in E$.

Si $[a,a+h]\subseteq U$: $\boxed{\Big\|f(a+h)-\big(f(a)+\frac{\mathrm{d}f(a)}{1!}\cdot h+\cdots+\frac{\mathrm{d}^n f(a)}{n!}\cdot h^n\big)\Big\|\le \underbrace{\sup_{0\le t\le1}\Big\|\frac{\mathrm{d}^{n+1}f(a+th)}{(n+1)!}\Big\|}_{\le+\infty}\times\|h\|^{n+1}}$.

Théorème (« formule de Taylor avec reste intégral »)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U}\longrightarrow F$ de C^{n+1} ($n\ge0$), $a\in U$ et $h\in E$.

Si $[a,a+h]\subseteq U$: $\boxed{f(a+h)=f(a)+\frac{\mathrm{d}f(a)}{1!}\cdot h+\cdots+\frac{\mathrm{d}^n f(a)}{n!}\cdot h^n+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}^{n+1}f(a+th)\cdot h^{n+1}\,\mathrm{d}t}$.

Extremums locaux : à retenir (J-Y D)

Soient X un espace topologique et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie p.

Définition

Soient $A \subseteq X$, f une application de A dans $\mathbb{R}$, et $a \in A$.

(a) On dit que f admet *un maximum global (resp. un minimum global) au point a* si :

$$\forall x \in A \quad f(x) \leq f(a) \qquad (\text{resp. } \ \forall x \in A \quad f(x) \geq f(a)).$$

(b) On dit que f admet *un maximum local (resp. un minimum local) au point a* si :

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \quad \forall x \in V \cap A \quad f(x) \leq f(a) \qquad (\text{resp. } \ \exists V \in \mathcal{V}(a) \quad \forall x \in V \cap A \quad f(x) \geq f(a)).$$

(c) On dit que f admet *un extremum global (resp. un extremum local) au point a* si f admet au point a un maximum global ou un minimum global (resp. un maximum local ou un minimum local).

Définition-Proposition

Soient U un ouvert de E, f une application de U dans $\mathbb{R}$, et $a \in U$.
On suppose que f est différentiable en a.

(a) On dit que f admet *un point critique au point a* si $\mathrm{d}f(a) = 0$.

(b) Si f admet un extremum local en a, alors f admet un point critique en a.

Définition

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, et $a \in U$ tel que $\mathrm{d}^2 f(a)$ est définie.
On suppose que f admet un point critique en a.(⋆)

(a) On appelle *matrice hessienne de f en a dans une base $\mathscr{B}$ de E* la matrice symétrique :

$$\operatorname{Hess} f(a) := \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\underbrace{h \mapsto \mathrm{d}^2 f(a) \cdot h^2}_{\text{forme quadratique sur } E}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ où } (x_k)_{1 \leq k \leq p} \text{ sont les coordonnées suivant } \mathscr{B}.$$

(b) On appelle *signature de f en a* la signature (s,t) de la forme quadratique $\operatorname{Hess} f(a)$.
On dit que le point critique a de f est *non dégénéré* si la matrice $\operatorname{Hess} f(a)$ est inversible.

Proposition

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, et $a \in U$ tel que $\mathrm{d}^2 f(a)$ est définie.
On suppose ici que f admet un point critique en a.

(a) Si f admet un minimum local (resp. maximum local) en a, alors la forme quadratique $\operatorname{Hess} f(a)$ est positive (resp. négative). $\longleftarrow$ signifie que $(s,t) = (k,0)$ (resp. $(s,t) = (0,k)$) pour un certain $k \in \{0,1,...,p\}$

(b) Si la forme quadratique $\operatorname{Hess} f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum local (resp. maximum local) en a. $\longleftarrow$ signifie que $(s,t) = (p,0)$ (resp. $(s,t) = (0,p)$)

Remarque (très utile)

Une matrice symétrique réelle $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$ est définie positive si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix} > 0 \ \text{ pour tout } k \in \{1,...,p\}.^{(\star\star)}$$

(⋆) Cette hypothèse sera indispensable quand on voudra définir *la forme quadratique hessienne* d'une application f allant d'une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, sur l'espace tangent d'un point (critique) a.

(⋆⋆) Pour l'implication délicate, on pose $\varphi(X,Y) := {}^t XAY$ quand $X, Y \in \mathbb{R}^p$ et raisonne par récurrence finie sur k. Soient $k \in \{1,...,p\}$ et $(v_1,...,v_k)$ une base φ-orthonormée de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. On fixe v non-nul dans le φ-orthogonal de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$ (droite). On a $v \notin \mathbb{R}^k \times \{0\}$ puis $\varphi(v,v) > 0$ au vu de la matrice de φ dans $(v_1,...,v_k,v)$. La base $\left(v_1,...,v_k,\frac{v}{\sqrt{\varphi(v,v)}}\right)$ de $\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$ est φ-orthonormée. Variante : $\varphi_{|(\mathbb{R}^{k+1}\times\{0\})^2}$ a pour signature $(k+1,0)$.

Inversion locale et fonctions implicites : à retenir (J-Y D)

Soient E, F, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$, et $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f(a)$ est définie.

(a) On appelle *matrice jacobienne de f en a dans des bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F* la matrice :

$$J_f(a) := \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\, \mathrm{d}f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le q\\ 1\le j\le p}} \quad \text{où} \quad f(x) \underset{/\mathscr{C}}{\left|\begin{matrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x)\end{matrix}\right.} \text{ et } (x_j)_{1\le j\le p} \text{ sont les coordonnées suivant } \mathscr{B}.$$

(b) On appelle *rang de f en a* le rang de $\mathrm{d}f(a)$, c'est-à-dire le rang de $J_f(a)$.$^{(\star)}$

Quand $p = q$, on appelle *jacobien de f en a* le nombre réel $\frac{D(f_1,\dots,f_p)}{D(x_1,\dots,x_p)}(a) := \det J_f(a)$.

Définition

On dit qu'une application $\varphi\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } F}{V}$ est *un C^n-difféomorphisme* si :

φ est une bijection, φ est de classe C^n, et φ^{-1} est de classe C^n.

Théorème (« théorème d'inversion locale »)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ de classe C^n et $a \in U$.

Si $\mathrm{d}f(a)$ est bijective, alors il existe un ouvert U_0 de E contenant a inclus dans U et un ouvert V_0 de F contenant $f(a)$ tels que f se restreint en un C^n-difféomorphisme $\begin{array}{rl} f_0\colon U_0 & \to V_0 \\ x & \mapsto f(x)\end{array}$.

[La réciproque est vraie, et immédiate.]

Théorème (« théorème d'inversion globale »)

Soit $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ de classe C^n.

Si f est injective et $\mathrm{d}f(x)$ est bijective pour tout $x \in U$, alors la partie $V := f(U)$ de F est ouverte et l'application $\begin{array}{rl} \varphi\colon U & \to V \\ x & \mapsto f(x)\end{array}$ est un C^n-difféomorphisme.

[La réciproque est vraie, et immédiate.]

Théorème (« théorème des fonctions implicites »)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E\times F}{\Omega} \longrightarrow G$ de classe C^n et $(a,b) \in \Omega$.

On suppose que $f(a,b) = 0$ et la différentielle partielle $\underbrace{\partial_2}_{\text{par rapport à « la fonction implicite » } b} f\,(a,b)$ de f en (a,b) est bijective.

Alors il existe un ouvert de $E \times F$ de la forme $\underset{\text{ouvert de } E}{U} \times \underset{\text{ouvert de } F}{V}$ contenant (a,b) inclus dans Ω et une application $\varphi\colon U \to V$ de classe C^n, tels que pour tout $x \in U$ l'équation $f(x,y) = 0$ d'inconnue $y \in V$ a pour unique solution $\varphi(x)$.$^{(\star\star)}$

De plus : $\varphi(a) = b$ et $\underbrace{\boxed{\mathrm{d}\varphi(a) = -\big(\partial_2 f(a,b)\big)^{-1} \circ \partial_1 f(a,b)}}_{\text{se retrouve en pensant à « } 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, \underbrace{\varphi(x)}_{y}) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \text{ »}}$.

$(\star)$ Afin d'étudier le rang de f en a lorsque a varie, il peut être utile d'utiliser le critère suivant : le rang d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ est l'ordre maximal des matrices carrées inversibles extraites de M.

$(\star\star)$ Géométriquement cela signifie que : si $\big(\mathrm{d}f(a,b)\big)^{-1}(\{0\})$ est un graphe "$y =$ fonction (linéaire) de x" alors $f^{-1}(\{0\})$ est « localement » un graphe "$y =$ fonction (de classe C^n) de x".

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$: à retenir (J-Y D)

Définition

Soient $f, g\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^k ($p, q \in \mathbb{N}$ et $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$), et $a \in U$.

(a) On dit que f est *une submersion en a* si $\mathrm{d}f(a)$ est surjective (c'est-à-dire : $\operatorname{rg} \mathrm{d}f(a) = q$).
On dit que f est *une submersion* si elle est une submersion en tout point de U.

(b) On dit que g est *une immersion en a* si $\mathrm{d}g(a)$ est injective (c'est-à-dire : $\operatorname{rg} \mathrm{d}g(a) = p$).
On dit que g est *une immersion* si elle est une immersion en tout point de U.

On dit que g est *un plongement* si g est une immersion et $\begin{array}{l} U \to g(U) \\ x \mapsto g(x) \end{array}$ est un homéomorphisme.

Théorème (« théorème du rang constant »)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^k ($p, q \in \mathbb{N}$ et $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$), $a \in U$ et $r \in \mathbb{N}$.

(a) On a : f est une submersion en a si et seulement si $p \geq q$ et il existe un C^k-difféomorphisme $\varphi\colon \underset{\text{ouvert de } U \text{ contenant } a}{V} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{V'}$ tel que : $f|_V\colon x = \underbrace{\varphi^{-1}}_{\substack{\text{du coté du} \\ \text{gros espace}}}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in V \longmapsto y = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$.

L'ensemble des points de U où f est une submersion est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

(b) On a : f est une immersion en a si et seulement si $p \leq q$ et il existe un C^k-difféomorphisme $\psi\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q \text{ contenant } f(a)}{W} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q}{W'}$ tel que : $f(V) \subseteq W$ et $f|_V\colon x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in V \longmapsto y = \underbrace{\psi^{-1}}_{\substack{\text{du coté du} \\ \text{gros espace}}}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$.

L'ensemble des points de U où f est une immersion est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

(c) Le rang de f est égal à r au voisinage de a si et seulement si $p \geq r$ et $q \geq r$ et il existe des C^k-difféomorphismes $\varphi\colon \underset{\text{ouvert de } U \text{ contenant } a}{V} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{V'}$ et $\psi\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q \text{ contenant } f(a)}{W} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q}{W'}$ tels que :

$$f(V) \subseteq W \qquad \text{et} \qquad \underbrace{f|_V\colon x = \varphi^{-1}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in V \longmapsto y = \psi^{-1}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q.}_{\text{c'est-à-dire : } \forall x' = (x'_1, \ldots, x'_p) \in V' \quad \psi(f(\varphi^{-1}(x'))) = (x'_1, \ldots, x'_r, 0, \ldots, 0)}$$

Définition-Proposition

Soient $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $d \in \mathbb{N}$.

(a) On dit que S est une *une sous-variété de classe C^k et dimension d de $\mathbb{R}^n$* si pour tout $a \in S$, il existe un C^k-difféomorphisme $c\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } a}{U} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n}{U'}$ tel que $c(U \cap S) = c(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

Dans ce cas *l'espace vectoriel tangent à S en $a \in S$* est le sous-espace vectoriel suivant de $\mathbb{R}^n$:
$T_a S \overset{\text{définition}}{=} \left\{ \gamma'(0) \ ; \ \gamma\colon \underset{\substack{\text{intervalle} \\ \text{ouvert contenant } 0}}{I} \to \mathbb{R}^n \text{ de classe } \mathrm{C}^k,\ \gamma(I) \subseteq S \text{ et } \gamma(0) = a \right\} \overset{\text{proposition}}{=} (\mathrm{d}c(a))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

(b) Lorsque $S = f^{-1}(\{0\})$ avec $f\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^{n-d}$ C^k et f submersion en tout point de S, on a :

S est une sous-variété C^k de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et $\boxed{T_a S = (\mathrm{d}f(a))^{-1}(\{0\})}$ pour $a \in S$.

(c) Lorsque $S = \operatorname{Im} g$ avec $g\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d}{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ plongement C^k, on a :

S est une sous-variété C^k de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et $\boxed{T_{g(t)} S = \operatorname{Im} \mathrm{d}g(t)}$ pour $t \in \Omega$.

nécessaire localement (réalisera (b) et (c))

(d) On se donne une bijection $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ et note :
$$\widetilde{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \text{ pour tout } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$
Lorsque $\underbrace{S = \widetilde{\sigma}(\text{graphe}(h))}$ avec $h\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d}{\Omega} \to \mathbb{R}^{n-d}$ C^k, on a d'après (b) avec $g(t) = \widetilde{\sigma}(t, h(t))$:

c'est-à-dire $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{\sigma(d+1)} = h_1(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}) \text{ et } \ldots \text{ et } x_{\sigma(n)} = h_{n-d}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)})\}$

S est une sous-variété C^k de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et $\underbrace{\boxed{T_a S = \widetilde{\sigma}(\text{graphe}(\mathrm{d}h(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(d)})))}}$ pour $a \in S$.

c'est-à-dire $T_a S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{\sigma(d+1)} = \mathrm{d}h_1(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(d)}) \cdot (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}) \text{ et } \ldots \text{ et } x_{\sigma(n)} = \mathrm{d}h_{n-d}(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(d)}) \cdot (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)})\}$

Remarques

(a) Tout ouvert d'une sous-variété de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe C^k de $\mathbb{R}^n$.

(b) Pour démontrer qu'une application est un plongement, on pourra utiliser le résultat suivant.

Si $g\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d}{\Omega} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n}{\Omega'}$ est une application continue telle que

$$\underbrace{\underset{\text{compact}}{\forall K' \subseteq \Omega'} \quad \underset{\text{compact}}{\exists K \subseteq \Omega} \quad \forall x \in \Omega \quad (x \notin K \implies g(x) \notin K').}_{\text{on traduit cela en notant : } g(x) \underset{x \to \infty_\Omega}{\longrightarrow} \infty_{\Omega'}}$$

alors, l'image par l'application g d'un fermé de Ω est un fermé de Ω'. $\longleftarrow$ [idée : $\Omega \cup \{\infty_\Omega\}$ est compact]

Définition-Proposition

Soient X, Y, Z des sous-variétés de classe C^k de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$ ($k \in (\mathbb{N}\setminus\{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m, l \in \mathbb{N}$).

(a) On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est *de classe C^k* si :

$$\forall a \in X \qquad \exists\, \widetilde{f}\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } a}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ \ \mathrm{C}^k \qquad f|_{U\cap X} = \widetilde{f}|_{U \cap X}\,.^{(\star)}$$

Dans ce cas, pour $a \in X$ l'application $\begin{array}{rcl} T_a f\colon T_a X & \to & T_{f(a)} Y \\ v & \mapsto & \mathrm{d}\widetilde{f}(a)\cdot v \end{array}$ est indépendante du choix de $\widetilde{f}$.

(b) Si $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ sont de classe C^k, alors $g \circ f\colon X \to Z$ est de classe C^k et pour tout $a \in X$ on a : $\boxed{T_a(g \circ f) = T_{f(a)} g \circ T_a f}$.

(c) On dit qu'une application $\varphi\colon X \to Y$ est *un C^k-difféomorphisme* si :

φ est une bijection, φ est de classe C^k, et φ^{-1} est de classe C^k.

Définition-Proposition

Soient $f, g\colon \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^n}{X} \longrightarrow \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^m}{Y}$ de classe C^k ($k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m \in \mathbb{N}$).

(a) Pour tout $a \in X$, on dit que f est *une submersion en a* si $T_a f$ est surjective.

On dit que f est *une submersion* si elle est une submersion en tout point de X.

Dans ce cas, pour chaque $b \in Y$, l'ensemble $f^{-1}(\{b\})$ est une sous-variété de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ et on a $\boxed{T_a(f^{-1}(\{b\})) = (T_a f)^{-1}(\{0\})}$ pour $a \in f^{-1}(\{b\})$.

(b) Pour tout $a \in X$, on dit que g est *une immersion en a* si $T_a g$ est injective.

On dit que g est *une immersion* si elle est une immersion en tout point de X.

On dit que g est *un plongement* si g est une immersion et $\begin{array}{rcl} X & \to & g(X) \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$ est un homéomorphisme.

Dans ce cas $\operatorname{Im} g$ est une sous-variété C^k de $\mathbb{R}^m$ et on a $\boxed{T_{g(a)}(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} T_a g}$ pour $a \in X$.

Théorème (« théorème d'inversion locale »)

Soient $f\colon \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^n}{X} \to \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^m}{Y}$ de classe C^k ($k \in (\mathbb{N}\setminus\{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m \in \mathbb{N}$) et $a \in X$.

Il existe un ouvert X_0 de X contenant a et un ouvert Y_0 de Y contenant $f(a)$ tels que f se restreint en un C^k-difféomorphisme $\begin{array}{rcl} f_0\colon X_0 & \to & Y_0 \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ si et seulement si $T_a f$ est bijective.

Théorème (« théorème d'inversion globale »)

Soit $f\colon \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^n}{X} \longrightarrow \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^m}{Y}$ de classe C^k ($k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m \in \mathbb{N}$).

La partie $f(X)$ de Y est ouverte et l'application $\begin{array}{rcl} X & \to & f(X) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un C^k-difféomorphisme si et seulement si f est injective et $T_x f$ est bijective pour tout $x \in X$.

($\star$) Il en résulte immédiatement que si $f\colon X \to Y$ est de classe C^k et, X_0 et Y_0 sont des sous-variétés de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ telles que $X_0 \subseteq X$ et $Y_0 \subseteq Y$ avec $f(X_0) \subseteq Y_0$, alors $\begin{array}{rcl} X_0 & \to & Y_0 \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est de classe C^k.