Systèmes de racines abstraits : à retenir (J-Y D)

Références

• J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Ch. V. Cote : 25 SER 66 (en anglais : 25 SER 87 et 25 SER 01).

• S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Ch. III et Ch. X §6 et Exercises F. Cote : 67 HEL 78 (version révisée 67 HEL 01).

• V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishichick, E. B. Vinberg, *Lie Groups and Lie Algebras III*, Ch. 3 et Ch. 4, tables des pages 229-230 et 231-233. Cote : 03 EMS 41.

• N. Bourbaki *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*, Ch. 6. Cote : 03 BOU 73-2.

• A. W. Knapp *Lie groups beyond an introduction*, Ch. 2 et Ch. 6. Cote : 25 KNA 96 (édition augmentée 25 KNA 02).

Généralités

On se donne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie.

Définition

(a) Un *système de racines dans* V est une partie génératrice finie R de V telle que pour tout $\alpha \in R$, il existe $\check{\alpha} \in V^*$ vérifiant :

$$\check{\alpha}(\alpha) = 2, \quad \alpha(R) \subseteq \mathbb{Z}, \quad \text{et l'application} \quad \begin{array}{rcl} s_\alpha : V & \to & V \\ x & \mapsto & x - \check{\alpha}(x)\,\alpha \end{array} \quad \text{laisse stable } R.$$

Dans ce cas, les $\check{\alpha}$, $\alpha \in R$, sont uniques.

(b) Un système de racines R dans V est dit *irréductible* s'il est non-vide et n'est pas réunion de systèmes de racines dans deux sous-espaces vectoriels non-nuls supplémentaires de V.

Proposition

Soit R un système de racines dans V.

(a) Pour tout $\alpha \in R$, on a :

$$R \cap \mathbb{R}\alpha = \{-\alpha, \alpha\} \text{ ou } \{-\alpha, -\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{\alpha}{2}, \alpha\} \text{ ou } \{-2\alpha, -\alpha, \alpha, 2\alpha\} \quad \text{et} \quad (-\alpha)\check{} = -\check{\alpha}.$$

On dira que R est *réduit* quand $R \cap \mathbb{R}\alpha = \{-\alpha, \alpha\}$ pour tout $\alpha \in R$.

(b) Le sous-groupe $W(R)$ de $GL(V)$ engendré par les s_α, $\alpha \in R$, est fini.

(c) Il existe, et on fixe, un produit scalaire $(\ |\ )$ sur V qui rend les $w \in W(R)$ isométries. On a : s_α est la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathbb{R}\alpha)^\perp$ et $\check{\alpha} = 2\,\dfrac{(\alpha|\cdot)}{(\alpha|\alpha)}$ pour $\alpha \in R$.

(d) La partie $\check{R} := \{\check{\alpha}\ ;\ \alpha \in R\}$ de V^* est un système de racines dans V^*, en identifiant pour chaque $\alpha \in R$ l'élément $(\check{\alpha})\check{}$ de $(V^*)^*$ à α.

(e) On a : $s_{\check{\alpha}} = {}^t s_\alpha^{-1}$ pour $\alpha \in R$, et le morphisme de groupes $\begin{array}{rcl} W(R) & \to & W(\check{R}) \\ w & \mapsto & {}^t w^{-1} \end{array}$ est bijectif.

Bases et chambres

On se donne un système de racines R dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie.

Définition

(a) *Une base de* R est une partie $B = \underbrace{\{\alpha_1, ..., \alpha_l\}}_{\text{distincts}}$ de R telle que $(\alpha_1, ..., \alpha_l)$ est libre et

$$R \subseteq \{n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l\ ;\ n_1, ..., n_l \in \mathbb{N}\} \cup \{-(n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l)\ ;\ n_1, ..., n_l \in \mathbb{N}\}.$$

(b) *Une chambre de* R est une composante connexe de $V_{\text{reg}} := \{x \in V \mid \forall \alpha \in R\ \ \check{\alpha}(x) \neq 0\}$.

(c) *Un système de racines positives de* R est une partie de R formée des éléments dont les coordonnées relativement à une certaine base de V sont supérieures ou égales à $(0, ..., 0)$ pour l'ordre lexicographique.

Proposition

(a) Les applications $C \mapsto R^+ \mapsto B$ de l'ensemble des chambres de R dans celui des systèmes de racines positives de R puis des bases de R, déterminées comme suit, sont bijectives :

- $R^+ = \{\alpha \in R \mid \check{\alpha}(c) > 0\} = R \cap \{\sum_{\beta \in B} n_\beta \beta\ ;\ (n_\beta)_{\beta \in B} \in \mathbb{N}^B\}$ où $c \in C$ est fixé ;
- $B = \{\beta \in R^+ \mid \forall \beta', \beta'' \in R^+\ \ \beta \neq \beta' + \beta''\}$, et aussi $B = \{\beta \in R \mid \check{\beta}(\rho) = 1\}$ lorsque R est réduit en posant $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$;
- $C = \{x \in V \mid \forall \alpha \in R^+\ \ \check{\alpha}(x) > 0\} = \{x \in V \mid \forall \beta \in B\ \ \check{\beta}(x) > 0\}$.

(b) L'application $C \mapsto \check{C} := \{(x| \cdot)\ ;\ x \in C\}$ échange les chambres de R et de $\check{R}$. Au sens du (a), quand $C \simeq R^+ \simeq B$ on a aussi $\check{C} \simeq (R^+)\check{} \simeq \check{B}$ en notant :
$(R^+)\check{} := \{\check{\alpha}\ ;\ \alpha \in R^+\}$ et $\check{B} := \{\check{\beta}\ ;\ \beta \in B \text{ et } 2\beta \notin R\} \cup \{\frac{1}{2}\check{\beta}\ ;\ \beta \in B \text{ et } 2\beta \in R\}$.

(c) Soit B une base de R. La famille $(s_\beta)_{\beta \in B}$ engendre le groupe $W(R)$, et l'application $\begin{array}{ccc} W(R) & \to & \{\text{bases de } R\} \\ w & \mapsto & w(B) \end{array}$ est bijective.

(d) Soit C une chambre de R. L'application $\begin{array}{ccc} \overline{C} & \to & W(R)\backslash V \\ x & \mapsto & W(R) \cdot x \end{array}$ est bijective.

Classification

Définition

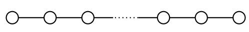
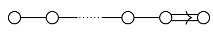
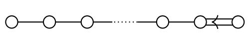
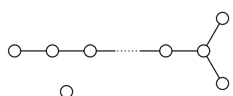
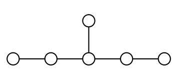
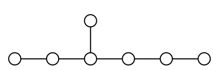
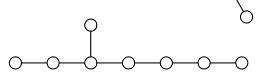
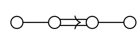
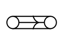
Soient R un système de racines réduit dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie et B une base de R. Le *diagramme de Dynkin de R associé à B* est le graphe muni de flèches dont les sommets sont les éléments de B et les arêtes sont obtenues, indépendamment du choix d'un produit scalaire qui rend les $w \in W(R)$ isométries, par :
– si $\alpha \perp \beta$: aucune arête ne relie $\overset{\alpha}{\circ}$ et $\overset{\beta}{\circ}$; $\leftarrow$ [$f(\alpha, \beta)$ et $f(\beta, \alpha)$ non-définis]
– si $\alpha \not\perp \beta$ et $\|\alpha\| = \|\beta\|$: une seule arête relie $\overset{\alpha}{\circ}$ et $\overset{\beta}{\circ}$; $\leftarrow$ [$f(\alpha, \beta) := 1$ et $f(\beta, \alpha) := 1$]
– si $\alpha \not\perp \beta$ et $\|\alpha\| > \|\beta\|$: $\frac{(\alpha|\alpha)}{(\beta|\beta)} \in \{2, 3\}$ arêtes orientées de $\overset{\alpha}{\circ}$ à $\overset{\beta}{\circ}$. $\leftarrow$ [$f(\alpha, \beta) := \frac{(\alpha|\alpha)}{(\beta|\beta)}$ et $f(\beta, \alpha) := \frac{(\beta|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$]

Proposition

Soient R_1 et R_2 des système de racines réduits de bases B_1 et B_2 dans des $\mathbb{R}$-espace vectoriel V_1 et V_2 de dimensions finies. Pour toute bijection φ de B_1 sur B_2 telle que $\frac{\|\varphi(\alpha)\|}{\|\varphi(\beta)\|} = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ (conservation du nombre d'arêtes orientées) quand $\alpha, \beta \in B_1$ sont distincts non-orthogonaux, l'unique application linéaire bijective $\widetilde{\varphi}$ de V_1 dans V_2 qui prolonge φ échange R_1 et R_2.

Théorème

(a) Tout système de racines R dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie est, de manière unique à l'ordre près, réunion finie de systèmes de racines irréductibles dans des sous-espaces vectoriels de V en somme directe.

(b) Un système de racines irréductible réduit dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie a un diagramme de Dynkin parmi
A_n :=  ($n \geq 1$ sommets), B_n :=  ($n \geq 2$ sommets),
C_n :=  ($n \geq 3$ sommets), D_n :=  ($n \geq 4$ sommets),
E_6 := , E_7 := , E_8 := , F_4 := ,
et G_2 :=  .
De plus, tous ces graphes munis de flèches sont des diagrammes de Dynkin.

(c) Un système de racines irréductible non-réduit dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ est réunion d'un système de racines de type B_n, où $B_1 := A_1$, avec les doubles de ses racines de plus petite longueur. On dira qu'un tel système de racines est de type BC_n.