Systèmes de racines concrets : à retenir (J-Y D)

Système de racines d'une algèbre de Lie réductive complexe

Définition-Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie réductive sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que les $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$, $X \in \mathfrak{h}$, sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$. On peut montrer que les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont aussi les sous-algèbres commutatives $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que les $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$, $X \in \mathfrak{h}$, sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$, qui sont maximales. D'où leur existence.

(b) On note $\mathrm{Car}\,\mathfrak{g}$ l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Proposition

Soient $\mathbf{G}$ un groupe de Lie complexe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ réductive et $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{g}$.

(a) Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées sous $\mathbf{G}$.

(b) Pour chaque $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, on pose : $\mathfrak{g}^\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{h} \quad [H, X] = \alpha(H)X\}$.
On note : $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}\}$.
On a : $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \mathfrak{g}^\alpha \Big)$ avec $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ et $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ quand $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

De plus : | $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est un système de racines réduit dans un sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{h}^*$;
| le système de racines $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est irréductible si et seulement si $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ est simple.

(c) Soit $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On a $\check{\alpha} \simeq H_\alpha$ avec $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ déterminé par : $\alpha(H_\alpha) = 2$ et $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha$.
De plus, en fixant $(X_\alpha, X_{-\alpha}) \in \mathfrak{g}^\alpha \times \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$, on a :

$$s_\alpha = {}^t\Big(\exp(\tfrac{\pi}{2}\,\mathrm{ad}(X_\alpha - X_{-\alpha}))|_{\mathfrak{h}}\Big)^{-1} = {}^t\Big(\exp(\tfrac{\mathrm{i}\pi}{2}\,\mathrm{ad}(X_\alpha + X_{-\alpha}))|_{\mathfrak{h}}\Big)^{-1}.$$

(d) On note $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathfrak{h})$ (resp. $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathfrak{h})$) le normalisateur (resp. centralisateur) de $\mathfrak{h}$ dans $\mathbf{G}$.
L'application $\begin{array}{rcl} \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathfrak{h})/\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathfrak{h}) & \to & W(R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})) \\ \dot{x} & \mapsto & {}^t\big((\mathrm{Ad}\,x)|_{\mathfrak{h}}\big)^{-1} \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Système de racines d'un groupe de Lie réel compact connexe

Définition

On note $\mathbb{C}_u$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

(a) Un tore (réel) est un groupe de Lie réel T vérifiant l'une des conditions équivalentes :
(i) T est compact connexe commutatif ;
(ii) T est isomorphe à un $\mathbb{C}_u^{\,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit G un groupe de Lie réel. On appelle *tore de G* tout sous-groupe de Lie de G qui est un tore. Au vu des dimensions de ses tores, le groupe de Lie G possède un tore maximal.

Proposition

Soit K un groupe de Lie réel compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$.

(a) L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$) est réductive. En particulier : $\mathfrak{k} = \mathrm{D}(\mathfrak{k}) \oplus \mathrm{Z}(\mathfrak{k})$.

(b) L'application $\mathfrak{t} \mapsto T = \exp(\mathfrak{t})$ de l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{k}$ dans l'ensemble des tores maximaux de K est définie et bijective. On se donne un tel couple $(\mathfrak{t}, T)$.

(c) On fixe un produit scalaire K-invariant sur $\mathfrak{k}$ (existe). Les $\mathrm{Ad}\,t$ avec $t \in T$ sont des rotations diagonalisables dans une même base $(X_1, ..., X_n)$ de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. On pose : $\mathrm{Ad}\,t \cdot X_k = \eta_k(t) X_k$.
On a : $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ et $R(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) = \{\mathrm{Lie}\,\eta_k \ ; \ 1 \leq k \leq n \text{ et } \mathrm{Lie}\,\eta_k \neq 0\} \subseteq \mathrm{i}\mathfrak{t}^*$.

(d) Soit $\alpha \in R(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$. Il existe $X_\alpha \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^\alpha$ tel que $[X_\alpha, -\overline{X_\alpha}] = H_\alpha$.

(e) On note $\mathrm{N}_K(T)$ (resp. $\mathrm{C}_K(T)$) le normalisateur (resp. centralisateur) de T dans K.
On a $\mathrm{C}_K(T) = T$ et l'application $\begin{array}{rcl} \mathrm{N}_K(T)/T & \to & W(R(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})) \\ \dot{x} & \mapsto & {}^t\big((\mathrm{Ad}\,x)|_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}}\big)^{-1} \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Un exemple d'utilisation des systèmes de racines

Références

[1] N. Bourbaki *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6* (1981) Cote : 03 BOU 73-2.

[2] N. Bourbaki *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 9* (1982) Cote : 03 BOU 75.

[3] T. Bröcker et T. tom Dieck *Representations of compact Lie groups* (1985), Cote : 25 BRO 85.

On fixe un groupe de Lie compact connexe K d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et un tore maximal T de K d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. On note $R \subseteq \mathrm{i}\mathfrak{t}$ le système de racines $R(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ de $(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$.

Chambres et alcôves

Définition

(a) (rappel) On appelle *chambre de* $\check{R}$ une composante connexe de $\mathrm{i}\mathfrak{t} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \operatorname{Ker} \alpha$.

(b) On appelle *alcôve de* R une composante connexe de $\mathrm{i}\mathfrak{t} \setminus \bigcup_{\alpha \in R,\, k \in \mathbb{Z}} \alpha^{-1}(k)$.

Proposition ([1] prop. 4 (i) et prop. 5 (i), p. 175)

On fixe une chambre $\check{C}$ de $\check{R}$.

(a) Il existe une unique alcôve $A(\check{C})$ de R telle que : $A(\check{C}) \subseteq \check{C}$ et $0 \in \overline{A(\check{C})}$.

(b) On note $R^+ = \{\alpha \in R \mid \alpha(\check{C}) \subseteq \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$ et $\{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ la base de R associée à R^+.

On suppose que R est irréductible.

Il existe $\widetilde{\alpha} \in R^+$ unique dont chacune des coordonnées suivant $(\alpha_1, ..., \alpha_l)$ est maximale. Dans ce cas, pour toute norme euclidienne K-invariante $\| \ \|$ sur $\mathrm{i}\mathfrak{t}^*$, on a : $\|\widetilde{\alpha}\| = \max_{\alpha \in R^+} \|\alpha\|$. On a : $A(\check{C}) = \{X \in \mathrm{i}\mathfrak{t} \mid \alpha_1(X) > 0, ..., \alpha_l(X) > 0 \text{ et } \widetilde{\alpha}(X) < 1\}$.

Description du centre et du groupe fondamental

On note : $\mathbb{Z}\check{R} = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{Z}H_\alpha \subseteq \mathrm{i}(\mathfrak{t} \cap \mathrm{D}(\mathfrak{k}))$. On se donne une alcôve A de R.

Théorème 1 ([2] prop. 11 p. 34, ou, [3] th. p. 223 et prop. 7.14 p. 230)

On a : $\mathbb{Z}\check{R} \subseteq \operatorname{Ker} \exp_T(2\mathrm{i}\pi \,\cdot\,)$ et le groupe quotient est isomorphe à $\Pi_1(K,1)$ au moyen de l'isomorphisme de groupes $\begin{array}{ccc} \operatorname{Ker} \exp_T(2\mathrm{i}\pi \,\cdot\,)/\mathbb{Z}\check{R} & \longrightarrow & \Pi_1(K,1) \\ \dot{X} & \longmapsto & [\exp(2\mathrm{i}\pi \cdot X)] \end{array}$.

De plus, l'application canonique $\overline{A} \cap \operatorname{Ker} \exp_T(2\mathrm{i}\pi \,\cdot\,) \to \operatorname{Ker} \exp_T(2\mathrm{i}\pi \,\cdot\,)/\mathbb{Z}\check{R}$ est bijective.

Théorème 2 ([2] prop. 8 (b) p. 30, ou, [3] prop. 7.16 (i) (iii) p. 230)

On a : $\operatorname{Ker} \exp_T(2\mathrm{i}\pi \,\cdot\,) \subseteq \{X \in \mathrm{i}\mathfrak{t} \mid RX \subseteq \mathbb{Z}\}$ et le groupe quotient est isomorphe à $\mathrm{Z}(K)$ au moyen de l'isomorphisme de groupes $\begin{array}{ccc} \{X \in \mathrm{i}\mathfrak{t} \mid RX \subseteq \mathbb{Z}\}/ \operatorname{Ker} \exp_T(2\mathrm{i}\pi \,\cdot\,) & \longrightarrow & \mathrm{Z}(K) \\ \dot{X} & \longmapsto & \exp(2\mathrm{i}\pi X) \end{array}$.

De plus, l'application canonique $\overline{A} \cap \{X \in \mathrm{i}\mathfrak{t} \mid RX \subseteq \mathbb{Z}\} \to \underbrace{\{X \in \mathrm{i}\mathfrak{t} \mid RX \subseteq \mathbb{Z}\}/\mathbb{Z}\check{R}}_{\text{à étudier avec la fin du théorème 1}}$ est bijective.

Exemple

On prend $K = SU(2) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) ; a, b \in \mathbb{C} \text{ et } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$ et $T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} e^{\mathrm{i}\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\theta} \end{smallmatrix}\right) ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$, donc $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(2) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) ; a \in \mathrm{i}\mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{C} \right\}$ et $\mathfrak{t} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i}\theta & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\theta \end{smallmatrix}\right) ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

L'isomorphisme $\iota : \begin{array}{ccc} \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} & \xrightarrow[\sim]{\mathbb{C}\text{-algèbres de Lie}} & \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \\ X + \mathrm{i}Y & \longmapsto & X + \mathrm{i}Y \end{array}$ vérifie $\underbrace{\iota\left(\overline{\iota^{-1}(Z)}\right)}_{\text{noté } \sigma(Z)} = -{}^t\overline{Z}$ pour $Z \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

On a : $R = \{\pm\alpha\}$ où $\alpha\left(\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i}\theta & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\theta \end{smallmatrix}\right)\right) = 2\mathrm{i}\theta$, puis $H_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. On peut prendre $X_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Par ailleurs : $\operatorname{Ker} \exp_T(2\mathrm{i}\pi \,\cdot\,) = \mathbb{Z}H_\alpha$. On en déduit que : $\Pi_1(K,1) = \{0\}$ et $\mathrm{Z}(K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.