CLASSIFICATION DES SYSTÈMES DE RACINES IRRÉDUCTIBLES

Systèmes de racines irréductibles non réduits

BC_l ($l \geqslant 1$) est réunion de B_l et des doubles de ses racines de plus petite longueur.

Racines : $\pm \varepsilon_i$ ($1 \leq i \leq l$), $\pm 2\varepsilon_i$ ($1 \leq i \leq l$), $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leq i < j \leq l$).

Nombre de racines : $n = 2l(l+1)$.

$R^\vee = R$.

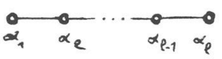
Systèmes de racines irréductibles réduits (cf BOURBAKI "Groupes et Algèbres de Lie" ch 6, p250 à p275)

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et de son produit scalaire usuel, ce qui donne $(\mathbb{R}^n)^* \underset{can}{\overset{\sim}{=}} \mathbb{R}^n$.

Isomorphismes $B_1 \simeq A_1$; $C_1 \simeq A_1$; $C_2 \simeq B_2$; $D_3 \simeq A_3$; [et $D_2 \simeq A_1 \times A_1$].

(*) Pour tout système de racines R muni d'une base B, on a :
$\sum_{\beta \in \Phi} \beta$ avec $\Phi \subset B$ appartient à $R \iff \Phi$ est une partie connexe du graphe de Dynkin de R.

SYSTÈMES DE TYPE A_l ($l \geqslant 1$)



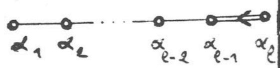
V est l'hyperplan de $E = \mathbf{R}^{l+1}$ formé des points dont la somme des coordonnées est nulle.
Racines : $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ ($i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant l+1$, $1 \leqslant j \leqslant l+1$).
Nombre de racines : $n = l(l+1)$.

Base : $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_l = \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}$.
Racines positives : $\varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k$ ($1 \leqslant i < j \leqslant l+1$).

$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_{l+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l$
$2\rho = l\alpha_1 + 2(l-1)\alpha_2 + \cdots + i(l-i+1)\alpha_i + \cdots + l\alpha_l$.

$R^\vee = R$,
$W(R) = \mathfrak{S}_{l+1}$, identifié au groupe des permutations des ε_i. Ordre de $W(R)$: $(l+1)!$
$l = 1$: $w_0 = -1$.
$l \geqslant 2$: w_0 transforme α_i en $-\alpha_{l+1-i}$.

SYSTÈMES DE TYPE C_l ($l \geqslant 1$)



$V = E = \mathbf{R}^l$.
Racines : $\pm 2\varepsilon_i$ ($1 \leqslant i \leqslant l$), $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leqslant i < j \leqslant l$).
Nombre de racines : $n = 2l^2$.

Base : $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\ldots$, $\alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$, $\alpha_l = 2\varepsilon_l$.

Racines positives
$$\begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k & (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k + 2 \sum_{j \leqslant k < l} \alpha_k + \alpha_l & (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ 2\varepsilon_i = 2 \sum_{i \leqslant k < l} \alpha_k + \alpha_l & (1 \leqslant i \leqslant l). \end{cases}$$

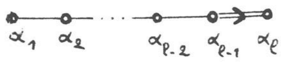
$\tilde{\alpha} = 2\varepsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$.
$2\rho = 2l\alpha_1 + 2(2l-1)\alpha_2 + \cdots + i(2l-i+1)\alpha_i + \cdots + (l-1)(l+2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}l(l+1)\alpha_l$.

$R^\vee$ est l'ensemble des vecteurs $\pm \varepsilon_i$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$.

$W(R)$ est produit semi-direct du groupe $\mathfrak{S}_l$, opérant par permutations des ε_i, et du groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$, opérant par $\varepsilon_i \longmapsto (\pm 1)_i \varepsilon_i$. Son ordre est $2^l.l!$

$w_0 = -1$.

SYSTÈME DE TYPE B_l ($l \geqslant 1$)

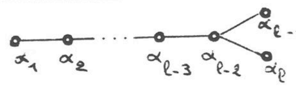


$V = E = \mathbf{R}^l$.
Racines : $\pm \varepsilon_i$ ($1 \leqslant i \leqslant l$), $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leqslant i < j \leqslant l$).
Nombre de racines : $n = 2l^2$.
Base : $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\ldots$, $\alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$, $\alpha_l = \varepsilon_l$.

Racines positives
$$\begin{cases} \varepsilon_i = \sum_{i \leqslant k \leqslant l} \alpha_k & (1 \leqslant i \leqslant l), \\ \varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k & (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k + 2 \sum_{j \leqslant k \leqslant l} \alpha_k & (1 \leqslant i < j \leqslant l). \end{cases}$$

$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + 2\alpha_l$.
$2\rho = (2l-1)\alpha_1 + 2(2l-2)\alpha_2 + \cdots + i(2l-i)\alpha_i + \cdots + l^2\alpha_l$.
$R^\vee$ est l'ensemble des vecteurs
$\pm 2\varepsilon_i$ ($1 \leqslant i \leqslant l$), $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leqslant i < j \leqslant l$).
$W(R)$ est produit semi-direct du groupe $\mathfrak{S}_l$, opérant par permutation sur les ε_i, et du groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$, opérant par $\varepsilon_i \longmapsto (\pm 1)_i \varepsilon_i$. Son ordre est $2^l.l!$
$w_0 = -1$.

SYSTÈME DE TYPE D_l ($l \geqslant 3$)



$V = E = \mathbf{R}^l$.
Racines : $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leqslant i < j \leqslant l$; (ε_i) base canonique de $\mathbf{R}^l$).
Nombre de racines : $n = 2l(l-1)$.
Base :
$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\ldots$, $\alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$, $\alpha_l = \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l$.

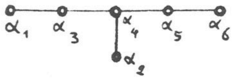
Racines positives
$$\begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum_{i \leqslant k \leqslant j-1} \alpha_k & (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_l = \sum_{i \leqslant k \leqslant l-2} \alpha_k + \alpha_l & (1 \leqslant i < l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j = \sum_{i \leqslant k \leqslant j-1} \alpha_k + 2 \sum_{j \leqslant k \leqslant l-2} \alpha_k + \alpha_{l-1} + \alpha_l & (1 \leqslant i < j < l). \end{cases}$$

$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$.
$2\rho = 2(l-1)\alpha_1 + 2(2l-3)\alpha_2 + \cdots + 2\left(il - \frac{i(i+1)}{2}\right)\alpha_i + \cdots + \frac{l(l-1)}{2}(\alpha_{l-1} + \alpha_l)$.

$R^\vee = R$.
$W(R)$ est produit semi-direct du groupe $\mathfrak{S}_l$, opérant par permutations des ε_i, et du groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1}$, opérant par $\varepsilon_i \longmapsto (\pm 1)_i \varepsilon_i$ avec $\prod_i (\pm 1)_i = 1$. Son ordre est $2^{l-1}l!$

$w_0 = -1$ si l est pair; $w_0 = -\varepsilon$ si l est impair, où ε est l'automorphisme qui permute α_{l-1} et α_l et laisse fixes les autres α_i.

SYSTÈME DE TYPE E_6



V est le sous-espace de $E = \mathbf{R}^8$ formé des points dont les coordonnées (ξ_i) sont telles que $\xi_6 = \xi_7 = -\xi_8$.
Racines : $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$,

$$\pm \frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right) \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{5} \nu(i) \text{ pair.}$$

Nombre de racines : $n = 72$.

Base : $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7)$, $\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$,
$\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $\alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$, $\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4$.
Racines positives : $\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$,

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right) \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{5} \nu(i) \text{ pair.}$$

Racines positives ayant un coefficient $\geqslant 2$ (*) (on note $\begin{smallmatrix} a\,c\,d\,e\,f \\ b \end{smallmatrix}$ la racine $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + f\alpha_6$) :

$\begin{smallmatrix}01210\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}11210\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}01211\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}12210\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}11211\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}01221\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}12211\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}11221\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}12221\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}12321\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}12321\\2\end{smallmatrix}$.

$\tilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$

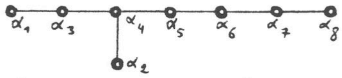
$2\rho = 2(8\alpha_1 + 11\alpha_2 + 15\alpha_3 + 21\alpha_4 + 15\alpha_5 + 8\alpha_6)$.

$R^\vee = R$.

Ordre de $W(R)$: $2^7.3^4.5$.

w_0 transforme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, respectivement en $-\alpha_6, -\alpha_2, -\alpha_5, -\alpha_4, -\alpha_3, -\alpha_1$.

SYSTÈME DE TYPE E_8



$V = E = \mathbf{R}^8$.
Racines : $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(i < j)$, $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} (-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i$ avec $\sum_{i=1}^{8} \nu(i)$ pair.
Nombre de racines : $n = 240$.
Base :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7),$$

$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $\alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$,
$\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4$, $\alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5$, $\alpha_8 = \varepsilon_7 - \varepsilon_6$.

Racines positives :

$$\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j \ (i < j), \quad \frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{7} (-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right) \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{7} \nu(i) \text{ pair.}$$

Les racines positives ne contenant pas α_8 proviennent de E_7.
Racines positives contenant α_8 et ayant un coefficient $\geqslant 2$ (*) (on note $\begin{smallmatrix} a\,c\,d\,e\,f\,g\,h \\ b \end{smallmatrix}$ la racine $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + f\alpha_6 + g\alpha_7 + h\alpha_8$) :

$\begin{smallmatrix}0121111\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}0122111\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1121111\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}0122211\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1221111\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1122111\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1222111\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1122211\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}0122221\\1\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}1232111\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1222211\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1122221\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1232111\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1232211\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1222221\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1232211\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1233211\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1232221\\1\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}1233211\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1232221\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1233221\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1243211\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1233221\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1233321\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1343211\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1243221\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1233321\\2\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}2343321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1344321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1354321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2343211\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1343221\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1243321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2343221\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1343321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1244321\\2\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}2344321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1354321\\3\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2354321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2354321\\3\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2454321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2454321\\3\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2464321\\3\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2465321\\3\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2465421\\3\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}2465431\\3\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2465432\\3\end{smallmatrix}$

$\tilde{\alpha} = \varepsilon_7 + \varepsilon_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8$

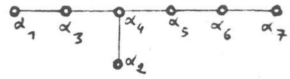
$2\rho = 2(46\alpha_1 + 68\alpha_2 + 91\alpha_3 + 135\alpha_4 + 110\alpha_5 + 84\alpha_6 + 57\alpha_7 + 29\alpha_8)$.

$R^\vee = R$.

Ordre de $W(R)$: $2^{14}.3^5.5^2.7$.

$w_0 = -1$.

SYSTÈME DE TYPE E_7



V est l'hyperplan de $E = \mathbf{R}^8$ orthogonal à $\varepsilon_7 + \varepsilon_8$.
Racines : $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 6)$, $\pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)$,

$$\pm \frac{1}{2}\left(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right) \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{6} \nu(i) \text{ impair.}$$

Nombre de racines : $n = 126$.

Base : $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7)$,

$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $\alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$,
$\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4$, $\alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5$.

Racines positives : $\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 6)$, $\varepsilon_8 - \varepsilon_7$,

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right) \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{6} \nu(i) \text{ impair.}$$

Les racines positives ne contenant pas α_7 proviennent de E_6.
Racines positives contenant α_7 et ayant un coefficient $\geqslant 2$ (*) (on note $\begin{smallmatrix} a\,c\,d\,e\,f\,g \\ b \end{smallmatrix}$ la racine $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + f\alpha_6 + g\alpha_7$) :

$\begin{smallmatrix}012111\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}112111\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}012211\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}122111\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}112211\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}012221\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}122211\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}112221\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}122221\\1\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}123211\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123221\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123211\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123321\\1\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123221\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}124321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}134321\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}234321\\2\end{smallmatrix}$

$\tilde{\alpha} = \varepsilon_8 - \varepsilon_7 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$

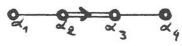
$2\rho = 34\alpha_1 + 49\alpha_2 + 66\alpha_3 + 96\alpha_4 + 75\alpha_5 + 52\alpha_6 + 27\alpha_7$.

$R^\vee = R$.

Ordre de $W(R)$: $2^{10}.3^4.5.7$.

$w_0 = -1$.

SYSTÈME DE TYPE F_4



$V = E = \mathbf{R}^4$.
Racines : $\pm \varepsilon_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$,
$\frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$.
Nombre de racines : $n = 48$.

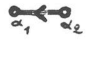
Base : $\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\alpha_3 = \varepsilon_4$, $\alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$.
Racines positives : ε_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$,
$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$.
Racines positives ayant un coefficient $\geqslant 2$ (*) (on note $a\,b\,c\,d$ la racine $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4$) :

0120 1120 0121 1220 1121 0122 1221 1122 1231 1222 1232 1242 1342 2342

$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$
$2\rho = 16\alpha_1 + 30\alpha_2 + 42\alpha_3 + 22\alpha_4$.

$R^\vee$ est l'ensemble des vecteurs $\pm 2\varepsilon_i$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$.
$W(R)$ est produit semi-direct de $\mathfrak{S}_3$ par un groupe lui-même produit semi-direct de $\mathfrak{S}_4$ par $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$. Son ordre est $2^7.3^2$.
$w_0 = -1$.

SYSTÈME DE TYPE G_2



V est l'hyperplan de $E = \mathbf{R}^3$ d'équation $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$.
Racines : $\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, $\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$, $\pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$,
$\pm(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$, $\pm(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3)$, $\pm(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$.
Nombre de racines : 12.
Base : $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.
Racines positives : α_1, α_2, $\alpha_1 + \alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + 2\alpha_2$.
$\tilde{\alpha} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$
$2\rho = 2(5\alpha_1 + 3\alpha_2)$.
$R^\vee$ est l'ensemble des vecteurs $\pm\alpha_1$, $\pm(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\pm(2\alpha_1 + \alpha_2)$,
$\pm\frac{1}{3}\alpha_2$, $\pm\frac{1}{3}(3\alpha_1 + \alpha_2)$, $\pm\frac{1}{3}(3\alpha_1 + 2\alpha_2)$.
$W(R)$ est le groupe diédral d'ordre 12.
$w_0 = -1$.