Variétés différentiables : à retenir (J-Y D)

Références

M. Berger et B. Gostiaux. *Géométrie différentielle* (ch. 2 et ch. 3). PUF, 1987. Cote : 67 BER 92 (en anglais : 67 BER 88).

P. Dolbeault *Analyse complexe* (paragraphes 3.3, 6.4, et 7.4 du ch. 7). Masson, 1990. Cote : 45 DOL 90.

1 Variétés lisses ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou holomorphes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

1.1 Variétés

On appelle *variété lisse* (resp. *variété holomorphe*) de dimension m un espace topologique X séparé et à base dénombrable muni d'un « atlas lisse » (resp. « atlas holomorphe »),
c'est-à-dire d'une famille $((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$ d'homéomorphismes $\varphi_i \colon \underset{\text{ouvert de } X}{U_i} \to \underset{\text{ouvert de } \mathbb{K}^m}{\varphi_i(U_i)}$, $i \in I$ vérifiant : $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ et pour tous $i, j \in I$ l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \colon \underbrace{\varphi_i(U_i \cap U_j)}_{\substack{\text{automatiquement} \\ \text{ouvert de } \mathbb{K}^m}} \to \mathbb{K}^m$ est C^∞ (resp. C^∞ de différentielle $\mathbb{C}$-linéaire).

Dans ce cas : la structure de variété de X est l'ensemble de ses « cartes », c'est-à-dire des couples (U, φ) pour lesquels $((U, \varphi), ((U_i, \varphi_i))_{i\in I})$ est encore un atlas de l'espace topologique X.

Cette structure détermine la topologie de X, car les ouverts de X sont les réunions d'ensembles de définition de cartes de X. La topologie de X redonne sa dimension quand X est non vide, car des ouverts non vides de $\mathbb{K}^{m_1}$ et de $\mathbb{K}^{m_2}$ sont non homéomorphes lorsque $m_1 \neq m_2$.

1.2 Exemples

- $\mathbb{K}^m$ muni de l'atlas formé de $\mathrm{id} \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ est une variété.
- L'espace topologique quotient $\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{\mathbb{K}\setminus\{0\}}_{\text{action par produit à gauche}} \Big\backslash \mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0\}$ muni de l'atlas formé des

$$\begin{array}{rcc} \varphi_i \colon\ U_i \overset{\text{déf}}{=} \{\mathbb{K}(x_0, ..., x_m)\,;\, (x_0, ..., x_m) \in \mathbb{K}^{m+1} \text{ et } x_i \neq 0\} & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ {[x_0, ..., x_m]} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{K}(x_0, ..., x_m) & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_m}{x_i}\right) \end{array}$$

avec $0 \leq i \leq m$ est une variété.

2 Morphismes de variétés

On fixe des variétés X, Y, Z de dimensions m, n, p.

2.1 Notations

- Pour tout $x \in X$ et toute carte (U, φ) de X $\underbrace{\text{« en } x \text{ »}}_{\text{c'est-à-dire } x \in U}$:

$$\underset{/\varphi}{x}\left|\begin{array}{l} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array}\right. \text{ signifie que } \varphi(x) = (x_1, \cdots, x_m).$$

- Pour toute application continue $f\colon X \to Y$, et, toutes cartes (U, φ) de X et (V, ψ) de Y :

$$\underset{/\varphi,\psi}{f}\left|\begin{array}{l} \widetilde{f}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_n \end{array}\right. \text{ signifie que } \; f_{|U\cap f^{-1}(V)}\colon \; \underset{/\varphi}{x}\left|\begin{array}{l} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array}\right. \mapsto \; \underset{/\psi}{f(x)}\left|\begin{array}{c} \widetilde{f}_1(x_1, ..., x_m) \\ \vdots \\ \widetilde{f}_n(x_1, ..., x_m) \end{array}\right. ,$$

c'est-à-dire que $f_{|U\cap f^{-1}(V)} = \psi^{-1} \circ (\widetilde{f}_1, \cdots, \widetilde{f}_n) \circ \varphi$.

2.2 Morphismes

- On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est un *morphisme de variétés de X dans Y* si pour tout $a \in X$ il existe une carte (U, φ) de X en a et une carte (V, ψ) de Y en $f(a)$ telles que

$$\underset{/\varphi,\psi}{f}\left|\begin{array}{l} \widetilde{f}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_n \end{array}\right. \text{ avec } \widetilde{f}_1, ..., \widetilde{f}_n \begin{cases} C^\infty \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ C^\infty \text{ de différentielle } \mathbb{C}\text{-linéaire en chaque point si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}.$$

- La composée de deux morphismes de variétés est un morphisme de variétés.

2.3 Partition de l'unité

On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de la variété lisse X, il existe des applications C^∞ $u_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i \in I$ telles que :

$$\begin{cases} \forall i \in I \;\; \mathrm{Supp}\, u_i \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{\overline{\{x \in X \mid u_i(x) \neq 0\}}}_{\text{« support de } u_i \text{ »}} \subseteq U_i \\ \forall x \in X \;\; \exists \underset{\text{voisinage de } x}{V} \subseteq X \;\; \{i \in I \mid u_{i|V} \neq 0\} \text{ fini} \\ \forall i \in I \;\; u_i \geq 0, \text{ et, } \forall x \in X \;\; \sum\limits_{i\in I} u_i(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} (u_i)_{i\in I} \text{ : « partition lisse} \\ \text{de l'unité subordonnée au} \\ \text{recouvrement } (U_i)_{i\in I} \text{ »} \end{pmatrix}.$$

(Par contre, quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute application holomorphe $u\colon X \to \mathbb{C}$ dont le support est un compact de l'ensemble de définition connexe d'une carte de X, est nulle.)

2.4 Produit

L'espace topologique produit $X \times Y$ muni de l'atlas formé des applications

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{\varphi\times\psi}_{(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)}\colon & U \times V & \to \; \mathbb{K}^{m+n} \\ & (x, y) & \mapsto \; (\varphi(x), \psi(y)) \end{array} \quad \text{avec } (U, \underbrace{\varphi}_{(x_1,...,x_m)}) \text{ carte de } X \text{ et } (V, \underbrace{\psi}_{(y_1,...,y_n)}) \text{ carte de } Y$$

est une variété (« variété produit de X et Y »).

De plus, pour toute application $\underbrace{\text{continue}}_{\text{(inutile)}}$ $h\colon Z \to X \times Y$, on a :

$$h \text{ morphisme de variétés } \overset{\text{prop}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{pr}_1 \circ h \text{ et } \mathrm{pr}_2 \circ h \text{ morphismes de variétés.}$$

3 Sous-variétés. Immersions. Submersions

On fixe des variétés X, Y, Z de dimensions m, n, p et un morphisme de variétés $f\colon X \to Y$.

3.1 Rang

• Le rang de f en $a \in X$ est l'entier défini indépendamment des choix d'une carte (U, φ) de X en a et d'une carte (V, ψ) de Y en $f(a)$ par :

$$\operatorname{rg}_a f \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{rang}\left(\mathrm{d}\widetilde{f}_1(a_1, ..., a_m), \ldots, \mathrm{d}\widetilde{f}_n(a_1, ..., a_m)\right) \quad \text{où} \quad \underset{/\varphi,\psi}{f}\left|\begin{array}{l}\widetilde{f}_1\\ \vdots\\ \widetilde{f}_n\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \underset{/\varphi}{a}\left|\begin{array}{l}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{array}\right. .$$

• Soit $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble des $x \in X$ en lesquels $\operatorname{rg}_x f \geq k$ est un ouvert de X.

Le rang de f est égal à k au voisinage d'un point a de X si et seulement si il existe une carte (U, φ) de X en a et une carte (V, ψ) de Y en $f(a)$ telles que :

$$\underset{/\varphi,\psi}{f}\left|\begin{array}{l}\widetilde{f}_1\\ \vdots\\ \widetilde{f}_n\end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \widetilde{f}_1(x_1, ..., x_m) = x_1 \\ \cdots \\ \widetilde{f}_k(x_1, ..., x_m) = x_k \\ \widetilde{f}_{k+1}(x_1, ..., x_m) = 0 \\ \cdots \\ \widetilde{f}_n(x_1, ..., x_m) = 0 \end{cases} \qquad (\text{« théorème du rang constant »}).$$

3.2 Immersion. Sous-variétés

• On dit que f est *une immersion* si $\operatorname{rg}_x f = \dim X$ pour tout $x \in X$.
Dans ce cas, pour toute application continue $h\colon Z \to X$ on a :
h morphisme de variétés $\overset{\text{prop}}{\Longleftrightarrow}$ $f \circ h$ morphisme de variétés.

• On appelle *sous-variété de dimension d de X* une partie S de X munie de la topologie induite qui a une structure de variété de dimension d (automatiquement unique) rendant l'injection canonique $\mathrm{inj}\colon S \to X$ immersion.

• Une partie S de X est une sous-variété de dimension d de X si et seulement si :
pour tout $a \in S$ il existe une carte $(U, \underbrace{\varphi}_{(x_1, \ldots, x_m)})$ de X en a telle que $U \cap S = \{x_{d+1} = \cdots = x_m = 0\}$.
Dans ce cas : S a un atlas formé des $(U \cap S, \underbrace{\varphi_{|U\cap S}}_{(x_1, \ldots, x_d)})$ avec (U, φ) comme ci-dessus.

• Les sous-variétés de dimension m de X sont les ouverts de X.

3.3 Inversion locale

• On dit que f est *un difféomorphisme* si f est bijective et f^{-1} est u morphisme de variétés
Les cartes de X sont donc les difféomorphismes d'un ouvert de X sur un ouvert de $\mathbb{K}^m$.

• Par le théorème du rang constant, pour tout $a \in X$ on a :
le morphisme de variétés f se restreint en un difféomorphisme d'un ouvert de X contenant a sur un ouvert de Y contenant $f(a)$ si et seulement si $\operatorname{rg}_a f = \dim X = \dim Y$.

• On dit que f est *un plongement* si f se restreint en un homéomorphisme de X sur $f(X)$.

• L'image d'une sous-variété par un plongement est une sous-variété de même dimension.

3.4 Submersions

• On dit que f est *une submersion* si $\operatorname{rg}_x f = \dim Y$ pour tout $x \in X$.
Dans ce cas, en supposant f surjective, pour toute application $\underbrace{\text{continue}}_{\text{(inutile)}}$ $h\colon Y \to Z$ on a :

$$h \text{ morphisme de variétés} \overset{\text{prop}}{\Longleftrightarrow} h \circ f \text{ morphisme de variétés.}$$

• L'image réciproque d'une sous-variété par une submersion est une sous-variété de même codimension.

4 Espaces tangents. Fibré tangent

On fixe une variété X de dimension m et $a \in X$.

4.1 Dérivation ponctuelle

• On note $(\mathcal{O}_X)_a$ la $\mathbb{K}$-algèbre des classes d'équivalences de morphismes de variétés $s\colon \underbrace{V}_{\substack{\text{ouvert de } X\\ \text{contenant } a}} \to \mathbb{K}$ pour : $\underbrace{s_1}_{\substack{\text{défini}\\ \text{sur } V_1}} \sim \underbrace{s_2}_{\substack{\text{défini}\\ \text{sur } V_2}} \iff \exists \underbrace{W}_{\substack{\text{ouvert de } X\\ \text{contenant } a}} \subseteq V_1 \cap V_2 \quad s_{1\,|W} = s_{2\,|W}$.

La classe $\dot{s}$ de s dans $(\mathcal{O}_X)_a$ sera notée $\mathrm{germe}_a(s)$ (« germe de s en a »).

• On note $\mathrm{Der}_a((\mathcal{O}_X)_a)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des $D_a \in (\mathcal{O}_X)_a^{\,*}$ vérifiant :
$D_a(\dot{s_1}\dot{s_2}) = D_a(\dot{s_1})\, s_2(a) + s_1(a)\, D_a(\dot{s_2})$ pour $\dot{s_1}, \dot{s_2} \in (\mathcal{O}_X)_a$ (« dérivation ponctuelle en a »).

4.2 Espace tangent en a

• On appelle *espace tangent à X en a* le $\mathbb{K}$-espace vectoriel :
$$T_aX = \mathrm{Der}_a((\mathcal{O}_X)_a) \overset{\text{prop}}{=} \Big\{\gamma'(0)\,;\, \gamma\colon \underbrace{I}_{\substack{\text{ouvert de } \mathbb{K}\\ \text{contenant } 0}} \xrightarrow{\text{variétés}} X \text{ et } \gamma(0) = a\Big\} \text{ où } \gamma'(0)\colon \begin{array}{rcl}(\mathcal{O}_X)_a & \to & \mathbb{K}\\ \dot{s} & \mapsto & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s(\gamma(t)))_{t=0}\end{array}.$$

• Lorsque X est une sous-variété de $\mathbb{K}^M$, l'injection linéaire $\begin{array}{rcl} T_aX & \to & \mathbb{K}^M \\ \underbrace{\gamma'(0)}_{\text{notation ci-dessus}} & \mapsto & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma(t))_{t=0}\end{array}$ « identifie » T_aX à son image, l'espace tangent usuel noté ici $(T_aX)_{\text{concret}}$.

• À un élément $\dot{s}$ de $(\mathcal{O}_X)_a$, on associe : $\mathrm{d}_a s \overset{\text{déf}}{=} (v \mapsto \underbrace{v(\dot{s})}_{\text{noté } v\,\cdot\, s}) \in (T_aX)^*$ (« différentielle de s en a »).

Chaque carte $(U, \underbrace{\varphi}_{(x_1,\ldots,x_m)})$ de X en a donne une application $\mathrm{d}_a\varphi\colon \begin{array}{rcl} T_aX & \to & \mathbb{K}^m \\ \gamma'(0) & \mapsto & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi(\gamma(t)))_{t=0}\end{array}$ linéaire bijective qui s'écrit : $\mathrm{d}_a\varphi = (\mathrm{d}_a x_1, \ldots, \mathrm{d}_a x_m)$. La base $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_a\right)$ de T_aX définie par $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_a = (\mathrm{d}_a\varphi)^{-1}(\underbrace{e_k}_{\text{vecteur de la base canonique}})$ pour $1 \leq k \leq m$, admet $(\mathrm{d}_a x_1, \cdots, \mathrm{d}_a x_m)$ pour base duale.

On trouve que : $\underset{/(\mathrm{d}_a x_1, \cdots, \mathrm{d}_a x_m)}{\mathrm{d}_a s}\left|\begin{array}{l}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a \cdot s = \frac{\partial \widetilde{s}}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_m)\\ \quad\vdots \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_a \cdot s = \frac{\partial \widetilde{s}}{\partial x_m}(a_1, \ldots, a_m)\end{array}\right.$ où $\underset{/\varphi}{a}\left|\begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_m\end{array}\right.$ et $\underset{/\varphi, \mathrm{id}_{\mathbb{K}}}{s}\big|\, \widetilde{s} = \widetilde{s}_1$.

4.3 Fibré tangent

On appelle *fibré tangent de X* la variété d'ensemble $TX \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{x \in X} \{x\} \times T_xX$ et de cartes
$$\underbrace{\mathrm{d}\varphi}_{(x_1,\ldots,x_m,\mathrm{d}_x x_1,\ldots,\mathrm{d}_x x_m)} : \begin{array}{rcl}\bigcup_{x \in U} \{x\} \times T_xX & \to & \mathbb{K}^{2m}\\ (x, v) & \mapsto & (\varphi(x), \mathrm{d}_x\varphi \cdot v)\end{array} \quad \text{avec } (U, \underbrace{\varphi}_{(x_1,\ldots,x_m)}) \text{ carte de } X.$$

4.4 Passage de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et note $X_{(\mathbb{R})}$ la variété lisse issue de X.

L'application $\begin{array}{rcl} T_aX & \to & (T_a(X_{(\mathbb{R})}))_{\mathbb{C}} \\ u & \mapsto & v + \mathrm{i}\, w\end{array}$ où $u = (\underbrace{v}_{} + \mathrm{i}\underbrace{w}_{\text{prolongés par } \mathbb{C}\text{-linéarité}})|_{(\mathcal{O}_X)_a}$ est $\mathbb{C}$-linéaire injective, car étant donné une carte $(U, \underbrace{\varphi}_{(z_1,\ldots,z_m)})$ de X en a à laquelle on associe la carte $(U, \underbrace{\varphi_{(\mathbb{R})}}_{\overset{\text{déf}}{=}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m)})$ de $X_{(\mathbb{R})}$ déterminée par $(z_1, \cdots, z_m) = (x_1 + \mathrm{i}\, y_1, \cdots, x_m + \mathrm{i}\, y_m)$, elle envoie $\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)_a$ sur $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_a - \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_a\right)$, $1 \leq k \leq m$.

Son image et le conjugué de son image sont deux sous-espaces vectoriels complexes supplémentaires de $(T_a(X_{(\mathbb{R})}))_{\mathbb{C}}$.

5 Application tangente

Soient X, Y, Z des variétés de dimensions m, n, p.
On se donne des morphismes de variétés $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$, et $a \in X$.

5.1 Application tangente

• L'application $\begin{array}{rcl} T_a f\colon T_a X & \to & T_{f(a)} Y \\ v & \mapsto & (w\colon s \mapsto v \cdot (s \circ f)) \end{array}$ est linéaire (« application tangente à f en a »).

Elle envoie $\gamma'(0)$ sur $(f \circ \gamma)'(0)$, pour $\gamma\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{K} \text{ contenant } 0}{I} \longrightarrow X$ morphisme de variétés tel que $\gamma(0) = a$.

On notera plus généralement : $\gamma'(t_0) = T_{t_0}\gamma \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{t_0}}_{\overset{\text{can}}{\simeq} 1 \in \mathbb{K}}$ pour $t_0 \in I$.

• Lorsque X et Y sont des sous-variétés de $\mathbb{K}^M$ et de $\mathbb{K}^N$, et $F\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{K}^M \text{ contenant } X}{\Omega} \longrightarrow \mathbb{K}^N$ est un morphisme de variétés tel que $F(X) \subseteq Y$, la restriction $\begin{array}{rcl} F_{|X,Y}\colon X & \to & Y \\ x & \mapsto & F(x) \end{array}$ est un morphisme de variétés et on obtient : $\begin{array}{rcl} T_a(F_{|X,Y})\colon T_a X \overset{\text{can}}{\simeq} (T_a X)_{\text{concret}} & \to & (T_{F(a)} Y)_{\text{concret}} \overset{\text{can}}{\simeq} T_{F(a)} Y. \\ v & \mapsto & \mathrm{d}F\,(a) \cdot v \end{array}$

• L'application $\begin{array}{rcl} Tf\colon TX & \to & TY \\ (x, v) & \mapsto & (f(x), T_x f \cdot v) \end{array}$ est un morphisme de variétés.

On a : $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$. et en particulier $T_a(g \circ f) = T_{f(a)} g \circ T_a f$

• Dans des cartes $(U, \underbrace{\varphi}_{(x_1, \dots, x_m)})$ de X en a et $(V, \underbrace{\psi}_{(y_1, \dots, y_n)})$ de Y en $f(a)$, en notant $\underset{/\varphi,\psi}{f} \left| \begin{array}{l} \widetilde{f}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_n \end{array} \right.$ on a :

$\underset{/\mathrm{d}\varphi,\mathrm{d}\psi}{Tf} \left| \begin{array}{l} \widetilde{f}_1 \\ \cdots \\ \widetilde{f}_n \\ \mathrm{d}\widetilde{f}_1 \\ \cdots \\ \mathrm{d}\widetilde{f}_n \end{array} \right.$ donc $\underset{\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a\right)_j, \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(a)}\right)_i\right)}{\mathfrak{Mat}} T_a f = \left(\dfrac{\partial \widetilde{f}_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_m)\right)_{i,j}$ où $\underset{/\varphi}{a} \left| \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \right.$, puis $\mathrm{rg}_{\,a} f = \mathrm{rg}\ T_a f$.

5.2 Cas des sous-variétés et des variétés produit

• Le fibré tangent à une sous-variété S de X « s'identifie » par $T\,\mathrm{inj}$ à une sous-variété de TX.
Pour toute submersion $p\colon X \longrightarrow \mathbb{K}^N$ et tout plongement $i\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{K}^d}{\Omega} \longrightarrow X$, on a :
$T_x(p^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Ker}(T_x p)$ pour $x \in p^{-1}(\{0\}$ et $T_{i(t_0)}(i(\Omega)) = \mathrm{Im}(T_{t_0} i)$ pour $t_0 \in \Omega$.

• Le difféomorphisme $\begin{array}{rcl} T(X \times Y) & \to & TX \times TY \\ v & \mapsto & (T\,\mathrm{pr}_1 \cdot v, T\,\mathrm{pr}_2 \cdot v) \end{array}$ « identifie » $T(X \times Y)$ et $TX \times TY$.

Pour tous morphismes de variétés $\Phi\colon Z \to X \times Y$ et $\Psi\colon X \times Y \to Z$, $T\Phi$ et $T_{(x,y)}\Psi$ se décomposent en :
$\begin{array}{rcl} TZ & \to & TX \times TY \overset{\text{can}}{\simeq} T(X \times Y) \\ v & \mapsto & (T(\mathrm{pr}_1 \circ \Phi) \cdot v, T(\mathrm{pr}_2 \circ \Phi) \cdot v) \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} T_{(x,y)}(X \times Y) \overset{\text{can}}{\simeq} T_x X \times T_y Y & \to & T_{\Psi(x,y)} Z \\ (v, w) & \mapsto & T(\Psi(.,y)) \cdot v + T(\Psi(x,.)) \cdot w \end{array}$.

• Soient $f\colon X \times Y \to Z$ un morphisme de variétés et $(a, b) \in X \times Y$. On pose : $c = f(a, b)$.
Si $T_b(f(a, \cdot))$ est bijective, alors il existe un ouvert U de X contenant a, un ouvert V de Y contenant b et un morphisme de variétés $\varphi\colon U \to V$ tels que pour tout $x \in U$ l'équation $f(x, y) = c$ d'inconnue $y \in V$ a pour unique solution $\varphi(x)$. De plus $\varphi(a) = b$ et $T_a\varphi = -\big(T_b(f(a, \cdot))\big)^{-1} \circ T_a(f(\cdot, b))$.

5.3 Passage de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et note encore $X_{(\mathbb{R})}$ la variété lisse issue de X.

• L'application $\begin{array}{rcl} T_a X & \to & T_a(X_{(\mathbb{R})}) \\ \gamma'(0) & \mapsto & (\gamma_{|I \cap \mathbb{R}})'(0) \end{array}$ est $\mathbb{R}$-linéaire bijective, car étant donné des cartes associées $(U, \underbrace{\varphi}_{(z_1, \dots, z_m)})$ et $(U, \underbrace{\varphi_{(\mathbb{R})}}_{(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)})$ de X et $X_{(\mathbb{R})}$ en a, elle envoie $\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)_a$ et $i\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)_a$ sur $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_a$ et $\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_a$, $1 \leq k \leq m$.

• Une application $f_0\colon X_{(\mathbb{R})} \to Y_{(\mathbb{R})}$ de classe C^∞ est égale à une application $\widetilde{f_0}\colon X \to Y$ holomorphe si et seulement si l'application composée $T_x X \overset{\text{can}}{\simeq} T_x(X_{(\mathbb{R})}) \xrightarrow{T_x \widetilde{f_0}} T_x(Y_{(\mathbb{R})}) \overset{\text{can}}{\simeq} T_{f(x)} Y$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $x \in X$. Dans ce cas : $T_x \widetilde{f_0} = T_x f_0$ pour $x \in X$.

6 Champs de vecteurs

On fixe des variétés X et Y de dimensions m et n.

6.1 Champs de vecteurs

• On appelle *champ de vecteurs sur* X un morphisme de variétés A de X dans TX tel que $A(x) \in T_xX$ pour tout $x \in X$. Dans ce cas, pour toute carte $(U, \underbrace{\varphi}_{(x_1,\,\dots,\,x_m)})$ de X, on a :

$$A_{|U} = \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{où} \quad A_{|U}\colon \underset{/\varphi}{x} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array} \right. \mapsto \underset{/T\psi}{A(x)} \left| \begin{array}{l} \quad x_1 \\ \quad \cdots \\ \quad x_m \\ \widetilde{A}_1(x_1,\dots,x_m) \overset{\text{déf}}{=} a_1(x) \\ \quad \cdots \\ \widetilde{A}_m(x_1,\dots,x_m) \overset{\text{déf}}{=} a_m(x) \end{array} \right. .$$

• L'image d'un champ de vecteurs A sur X par un difféomorphisme $\phi\colon X \to Y$ est le champ de vecteurs $\phi_* A$ sur Y défini par : $(\phi_* A)(y) = T_{\phi^{-1}(y)}\phi \cdot A(\phi^{-1}(y))$ pour tout $y \in Y$.

6.2 Crochet

• On appelle *crochet* de deux champs de vecteurs A et B sur X l'unique champ de vecteurs $[A,B]$ sur X vérifiant en chaque point :

$$[A,B] \cdot s = A \cdot (B \cdot s) - B \cdot (A \cdot s) \quad \text{pour tout morphisme de variétés } s\colon \underset{\text{ouvert de } X}{V} \to \mathbb{K}.$$

Pour toute carte $(U, \underbrace{\varphi}_{(x_1,\,\dots,\,x_m)})$ de X dans laquelle $A_{|U} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ et $B_{|U} = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ $\underbrace{\text{se lisent}}_{\text{cf. ci-dessus}}$ en $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$, $[A,B]_{|U} \overset{\text{prop}}{=} \sum\limits_{i=1}^{m}(\sum\limits_{j=1}^{m}(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}))\frac{\partial}{\partial x_i}$ se lit (en chaque point) en $\mathrm{d}\widetilde{B} \cdot \widetilde{A} - \mathrm{d}\widetilde{A} \cdot \widetilde{B}$.

• Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des champs de vecteurs sur X muni de $[\ ,\ ]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie. Les applications ϕ_* avec $\phi\colon X \to Y$ difféomorphisme sont des morphismes d'algèbres de Lie.

6.3 Cas des sous-variétés et des variétés produit

• Si des champs de vecteurs A et B sur X envoient une sous-variété S de X dans TS, alors : $[A,B]$ envoie S dans TS et $[A_{|S}, B_{|S}] = [A,B]_{|S}$.

• Si A_X, B_X sont des champs de vecteurs sur X et A_Y, B_Y sont des champs de vecteurs sur Y, alors l'identification $T(X \times Y) \overset{\text{can}}{\simeq} TX \times TY$ donne : $[(A_X, A_Y), (B_X, B_Y)] = ([A_X, B_X], [A_Y, B_Y])$.

6.4 Équations différentielles

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et fixe un champ de vecteurs A sur X.

• Il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times X$ et une application C^∞ $\Phi\colon \Omega \to X$ (« flot de A ») tels que : $\Phi(.,x_0)$ est pour chaque $x_0 \in X$ la *plus grande* solution de $x' = A(x)$ en x_0 à $t = 0$.

Donc les parties $\operatorname{Im}\Phi(.,x_0)$ de X (« orbite de x_0 ») avec $x_0 \in X$ forment une partition de X.

• Soit $(U, \underbrace{\varphi}_{(x_1,\,\dots,\,x_m)})$ une carte de X. On pose : $A_{|U} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Une application C^∞ $\gamma\colon \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \to X$ est une solution dans $\gamma^{-1}(U)$ de $x' = A(x)$ si et seulement si

$$\underset{/\varphi}{\gamma} \left| \begin{array}{l} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\gamma_1(t)}{\mathrm{d}t} = a_1(\gamma(t)) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}\gamma_m(t)}{\mathrm{d}t} = a_m(\gamma(t)) \end{array} \right. \qquad \text{pour tout } t \in \gamma^{-1}(U).$$