Cours d'analyse du second semestre de L1

(écrit par Jean-Yves Ducloux (*), version de 2023 avec table des matières)

Table des matières

Ch. 1. Continuité et dérivabilité
I. Continuité . . . 1
II. Dérivabilité . . . 6

Ch. 2. Intégrale de Riemann
I. Intégrale de Riemann d'une fonction continue . . . 11
II. Calcul de primitives . . . 19

Ch. 3. Études locales
I. Formule de Taylor-Lagrange . . . 27
II. Développements limités . . . 31
III. Tangentes et asymptotes . . . 40

Ch. 4. Équations différentielles
I. Équations différentielles d'ordre 1 . . . 47
II. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 . . . 51

Sources :

• Liret et Martinais, *Mathématiques pour le DEUG. Analyse 1ère année.* Éd. Dunod. [517 LIR]

• E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Cours de mathématiques [51 L RAM] :
[512 RAM], [514 RAM], [515 RAM], [517 RAM], [517 RAM], niveau L1 seul dans [51 L1 RAM]

• Marc Hindry, *Cours de Mathématiques, Première Année.* Université Paris 7.
(`http://www.imj-prg.fr/~marc.hindry/Cours-L1.pdf`)

Précisions :

Le fichier source contient :

– *des démonstrations* qu'on fait apparaître en vert en remplaçant

`\long\def\invisible#1{}` par `%\long\def\invisible#1{}`

– des compléments, pour s'adapter à d'éventuels nouveaux programmes plus complets, qu'on fait apparaître en rouge en remplaçant

`\long\def\horsprogramme#1{}` par `%\long\def\horsprogramme#1{}`

– une allusion à ce qui a été vu auparavant, pour s'adapter à d'éventuels nouveaux programmes plus simples, qu'on fait apparaître en orange en remplaçant

`\long\def\programmeprecedant#1{}` par `%\long\def\programmeprecedant#1{}`

(*) Pour me contacter : Jean-Yves Ducloux <ducloux@math.univ-paris-diderot.fr>

Ch. 1. Continuité et dérivabilité

Plan
I. Continuité
II. Dérivabilité

I. Continuité

1. Généralités

Notation

Soient $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u, l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On note « $\lim\limits_{\substack{x\to u\\ x\in I}} f(x) = l$ » lorsque :

- $\lim\limits_{x\to u} f(x) = l$ si $u \in]\inf I, \sup I[$;
- $\lim\limits_{x\to \underbrace{u^+}_{(-\infty \text{ quand } u=-\infty)}} f(x) = l$ et $(u \in I \Rightarrow f(u) = l)$ si $u = \inf I$;
- $\lim\limits_{x\to \underbrace{u^-}_{(+\infty \text{ quand } u=+\infty)}} f(x) = l$ et $(u \in I \Rightarrow f(u) = l)$ si $u = \sup I$.

Définition-Proposition

On considère $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) On dit que f *est continue en un point* x_0 *de* I si : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in I}} f(x) = f(x_0)$.

Cela équivaut à : $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall x \in I \;\; \big(|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\big)$.

(b) On dit que f *est continue* si elle est continue en tout point de I.

Exemple

Les applications polynomiales et les applications sin, cos, ln, exp sont continues sur leur intervalle de définition.

Proposition

On se donne une application $g\colon \underset{\text{intervalle infini}}{J} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Soient $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subseteq J$ et $x_0 \in I$.
Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

(b) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de J et $k \in J$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} k$ et g est continue en k, alors $g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(k)$.

rappel
(c) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de J, $k \in J \cup \{\inf J, \sup J\}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} k$ et $g(y) \underset{\substack{y\to k\\ y\in J}}{\longrightarrow} l$, alors $g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. ←[généralise le (b)]

Démonstration

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Continuité de g en $f(x_0)$: $|g(y) - g(f(x_0))| < \epsilon$ si $y \in J$ et $|y - f(x_0)| < \eta$.
Ensuite, par continuité de f en x_0 on a : $|f(x) - f(x_0)| < \eta$ dès que $x \in I$ et $|x - x_0| < \alpha$.
Ainsi, pour $x \in I$ on a : $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$.
Conclusion : $g \circ f$ est continue en x_0.

(b) Découlera de (c).

(c) On se place seulement dans le cas suivant : $k, l \in \mathbb{R}$ (mêmes idées dans les autres cas).
Soit $\varepsilon > 0$. Vu la limite de g en k, on a : $|g(y) - l| < \epsilon$ dès que $y \in J$ et $|y - k| < \eta$.
Ensuite, compte tenu de la limite de $(u_n)_{n \geq 0}$, on a : $|u_n - k| < \eta$ dès que $n \geq N$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \geq N \Rightarrow |u_n - k| < \eta \Rightarrow |g(u_n) - l| < \epsilon$.
Conclusion : $g(u_n) \underset{x \to u}{\longrightarrow} l$.

Découle des résultats sur la limite d'une composée. □

Remarque (« caractérisation séquentielle de la continuité »)

On se donne une application $g \colon \underset{\text{intervalle infini}}{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $k \in J$.

Si pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de J telle que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} k$ on a $g(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(k)$, alors g est continue en k.

Démonstration

On raisonne par contraposition. On suppose que g n'est pas continue en k :
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists x \in I \quad \big(|x - k| < \alpha \text{ et } |g(x) - g(k)| \geq \epsilon\big).$$
On fixe un tel $\varepsilon > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ le choix de $\alpha = \frac{1}{n+1}$ fournit $u_n \in I$ tel que :
$$|u_n - k| \leq \tfrac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad |g(u_n) - g(k)| \geq \epsilon.$$
En passant à la limite dans la première inégalité, on obtient : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} k$.
Mais la seconde inégalité impose, par l'absurde, que $g(u_n) \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} g(k)$.
Comme la condition de départ de la remarque n'est pas réalisée, l'implication est vraie. □

2. Les trois théorèmes

Notation

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > b$. On pose $[a, b] := [b, a]$ et $]a, b[:=]b, a[$.

Théorème (« *théorème des valeurs intermédiaires* »)

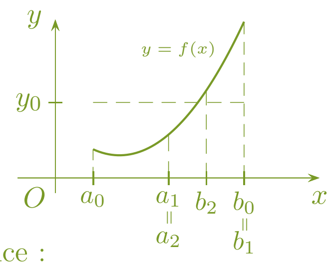
Soit $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

Pour tout $y_0 \in [f(a), f(b)]$, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $y_0 = f(x_0)$.

Démonstration

La méthode qui suit, par « dichotomie », peut être utilisée par ordinateur pour trouver une solution de l'équation $f(x) = y_0$. On suppose que $f(a) \leq f(b)$ (mêmes idées si $f(a) \geq f(b)$).

On va construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ par récurrence.



On commence en notant : $(a_0, b_0) := (a, b)$.

Ensuite, à partir de (a_n, b_n) on construit :
$$(a_{n+1}, b_{n+1}) := \begin{cases} (a_n, \frac{a_n + b_n}{2}) & \text{si } y_0 \leq f(\frac{a_n + b_n}{2}) \\ \text{ou} & \\ (\frac{a_n + b_n}{2}, b_n) & \text{si } f(\frac{a_n + b_n}{2}) < y_0 \end{cases}.$$

On obtient $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et à l'aide d'une récurrence :
$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \quad \text{avec} \quad (*) \quad f(a_n) \leq y_0 \leq f(b_n).$$
On note x_0 la limite commune à $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$. On a : $a_n \leq x_0 \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$. En particulier $a \leq x_0 \leq b$ (avec $n = 0$), puis $f(x_0) = y_0$ par passage à la limite dans $(*)$. □

Corollaire

Soit $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
On a : $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration

Une partie J de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si :

$$\forall u, v \in J \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (u \leq t \leq v \implies t \in J).$$

Soient $u, v \in f(I)$. On suppose que $u < v$ et montre que $[u, v] \subseteq f(I)$.
Il existe $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $\{f(a), f(b)\} = \{u, v\}$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à $f|_{[a,b]}$, on obtient : $[u, v] \subseteq f([a, b])$. D'où $[u, v] \subseteq f(I)$.

Ainsi $f(I)$ est un intervalle. □

Lorsque I et J sont deux intervalles infinis donnés, existe-t-il une application continue $f\colon I \to J$ telle que $f(I) = J$? Lorsque I n'est pas un segment, on peut construire une telle f au cas par cas → exercice. Par contre, lorsque I est un segment J doit être un segment.

Théorème (« *théorème de l'image continue d'un segment* »)

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

On a : $f([a, b])$ est un segment.

En particulier, il existe $c, d \in [a, b]$ tels que : $f(c) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $f(d) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Démonstration

On sait déjà que $f([a, b])$ est un intervalle. On montre qu'il a un plus grand élément.

On note : $M = \sup f([a, b]) \in \mathbb{R} \cup +\infty$.
Il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $[a, b]$ telle que $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ extraite de $(x_n)_{n \geq 0}$ qui converge : $x_{n_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} d \in \mathbb{R}$. Par prolongement des inégalités, on a : $d \in [a, b]$.

La continuité de f en l donne : $f(x_{n_k}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(d)$. D'où : $M = f(d) < +\infty$.

<u>Démonstration classique à partir de l'introduction de M</u>

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On introduit : $I_n = [n, +\infty[$ si $M = +\infty$, $I_n = \left[M - \frac{1}{n+1}, M\right]$ si $M \in \mathbb{R}$.
L'ensemble $A_n := \{x \in [a, b] \mid f(x) \in I_n\}$ est donc non-vide et majoré par b.

On pose : $s_n = \sup A_n \in [a, b]$. On va voir que s_n appartient à A_n.
Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on choisit $x_k \in A_n$ tel que : $s_n - \frac{1}{k+1} \leq x_k \leq s_n$.
On passe à la limite : $x_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} s_n$. Donc $f(x_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f(s_n)$.
Or : $f(x_k) \in I_n$ pour tout $k \geq 1$. D'où : $f(s_n) \in I_n$ par prolongement des inégalités.

• Par ailleurs, pour tout $n \geq 0$, on a : $A_{n+1} \subseteq A_n$, donc $\underbrace{s_{n+1}}_{\sup A_{n+1}} \leq \underbrace{s_n}_{\text{un majorant de } A_{n+1}}$.
La suite $(s_n)_{n \geq 0}$ est donc décroissante et minorée par a.
On pose : $d = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n \in [a, b]$. On obtient : $f(s_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(d)$.
Vu que $f(s_n) \in I_n$, on a aussi : $f(s_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$. D'où : $M = f(d) < +\infty$.

Les mêmes idées permettent de démontrer que $f([a, b])$ a un plus petit élément . □

Théorème (« *théorème de continuité de la "réciproque"* »)

Soit $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante).

L'application $\begin{array}{rl} f_0\colon & I \to f(I) \\ & x \mapsto f(x) \end{array}$ est bijective, et, sa réciproque [notée parfois par <u>abus</u> "f^{-1}"] est continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Démonstration

On se place dans le cas où f est strictement croissante (même méthode dans l'autre cas).

• Si $x, y \in I$ et $x \neq y$, on a : $x < y$ puis $f(x) < f(y)$, ou, $x > y$ puis $f(x) > f(y)$; dans les deux cas $f(x) \neq f(y)$. Par conséquent, f est injective. Cela signifie que f_0 est bijective.

• Soient $u, v \in f(I)$ tels que $u < v$. Il existe $x, y \in I$ tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$. Si $x \geq y$, on a $\underbrace{f(x)}_{u} \geq \underbrace{f(y)}_{v}$ contradiction. On a donc $x < y$, ce qui s'écrit $f_0^{-1}(u) < f_0^{-1}(v)$. Ainsi, f_0^{-1} est strictement croissante.

• Soit $y_0 \in f(I)$. On vérifie que $f_0^{-1} : \underset{\text{intervalle infini}}{f(I)} \longrightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ est continue en y_0.

On fixe $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et suppose que $x_0 \neq \inf I$ et $x_0 \neq \sup I$ (mêmes idées sinon).

Soit $\varepsilon > 0$. On fixe $a, b \in I$ tels que : $\underset{\text{peut-être hors de } I}{x_0 - \varepsilon} < a < \underbrace{x_0}_{f_0^{-1}(y_0)} < b < \underset{\text{peut-être hors de } I}{x_0 + \varepsilon}$.

On a : $f(a) < f(x_0) < f(b)$. On fixe $\alpha > 0$ tel que : $f(a) < y_0 - \alpha < y_0 < y_0 - \alpha < f(b)$. Soit $y \in f(I)$. Si $|y - y_0| < \alpha$, alors $f(a) < y < f(b)$, alors $a < f_0^{-1}(y) < f(b)$ car f_0^{-1} croît strictement, alors $\left|f_0^{-1}(y) - f_0^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon$.

On en déduit que f_0^{-1} est continue en y_0. □

Remarques

On reprend les notations du théorème précédant.

1. On a les précisions suivantes avec a et b et les limites appartenant tous à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:
– si $I = [a, b]$: $f(I) = [f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$) ;
– si $I =]a, b]$: $f(I) = \left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b)\right]$ (resp. $\left[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$) ;
– si $I = [a, b[$: $f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$ (resp. $\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)\right]$) ;
– si $I =]a, b[$: $f(I) = \left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$ (resp. $\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$).

2. Le graphe de $f_0{}^{-1}$ est l'image du graphe de f par la symétrie orthogonale $(x, y) \mapsto (y, x)$ par rapport à la première bissectrice.

Démonstration

1. On vérifie à chaque fois deux inclusions. L'inclusion $(\subseteq)$ découle de la monotonie de f, sachant que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ sont des bornes de $f(I)$. L'autre inclusion découle du théorème des valeurs intermédiaires.

2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $(y, x) \in \text{graphe}(f_0{}^{-1}) \iff (y \in f(I) \text{ et } f_0{}^{-1}(y) = x)$
$\iff (x \in I \text{ et } y = f(x)) \iff (x, y) \in \text{graphe}(f)$.

D'où le résultat. □

3. Fonctions réciproques usuelles

En annexe : les graphes des fonctions usuelles (dont cosh, sinh, et tanh).

Définition-Proposition (« fonctions trigonométriques réciproques »)

(a) Les applications $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont les réciproques (continues) des bijections continues strictement monotones suivantes :

$\begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ y & \mapsto & \sin y \end{array}$ qui croît, $\begin{array}{rcl} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ y & \mapsto & \cos y \end{array}$ qui décroît, $\begin{array}{rcl} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \tan y \end{array}$ qui croît.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R}, \text{ on a donc :} \\ \left(x \in [-1,1] \text{ et } y = \arcsin x\right) \iff \left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } x = \sin y\right) ; \\ \left(x \in [-1,1] \text{ et } y = \arccos x\right) \iff \left(y \in [0,\pi] \text{ et } x = \cos y\right) ; \\ y = \arctan x \iff \left(y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } x = \tan y\right). \end{array}\right)$$

(b) On a : $\left| \begin{array}{l} \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ quand } x \in]-1,1[\,; \\ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ quand } x \in]-1,1[\,; \\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ quand } x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$

On en déduit que : $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ quand $x \in [-1,1]$.

Remarques

1. Pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $\sin(\arcsin x) = \sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\arcsin x) = x$.
Cependant : $\arcsin(\sin\pi) \neq \pi$ (attention !).

2. Soit $x \in [-1,1]$. On a : $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ (éléments de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ de même sinus).
On a aussi : $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ (éléments de $[0,\pi]$ de même cosinus).

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\arctan(-x) = -\arctan x$ (éléments de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de même tangente).

Définition-Proposition (« fonctions hyperboliques »)

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ (paire), $\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ (impaires).

Donc : $\underbrace{\cosh^2 x - \sinh^2 x}_{(\cosh x+\sinh x)(\cosh x-\sinh x)} = 1$, $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$, et $\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$.

$\nwarrow$[$\cosh x \neq 0$]

(b) Les formules hyperboliques se déduisent des formules trigonométriques en utilisant : « $\cos(\mathrm{i}\,x) = \cosh x$, $\sin(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\sinh x$, et $\tan(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\tanh x$ » (procédé mnémotechnique).

Définition-Proposition (« fonctions hyperboliques réciproques »)

(a) Les applications $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{arcosh}\colon [1,+\infty[\, \to [0,+\infty[$, et $\operatorname{artanh}\colon]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ sont les réciproques des bijections continues strictement croissantes suivantes :
$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \sinh y \end{array}$, $\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ y & \mapsto & \cosh y \end{array}$, et $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ y & \mapsto & \tanh y \end{array}$.

(Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a donc :
$y = \operatorname{arsinh} x \iff x = \sinh y$;
$(x \in [1,+\infty[$ et $y = \operatorname{arcosh} x) \iff (y \in [0,+\infty[$ et $x = \cosh y)$;
$(x \in]-1,1[$ et $y = \operatorname{artanh} x) \iff x = \tanh y$.)

(b) On a : $\left| \begin{array}{l} \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \text{ et } \operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ quand } x \in \mathbb{R}\,; \\ \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \text{ quand } x \geq 1 \text{ et } \operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ quand } x > 1\,; \\ \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) \text{ et } \operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \text{ quand } -1 < x < 1. \end{array} \right.$

4. Fonctions uniformément continues

Définition-Proposition

Soit $f\colon \underbrace{I}_{\text{intervalle infini}} \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f *est uniformément continue* si :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, y \in I \ \left(|x-y| < \alpha \implies |f(x)-f(y)| < \epsilon\right)}_{\text{s'écrit en abrégé : } f(x)-f(y) \underset{x-y\to 0}{\longrightarrow} 0}.$$

Dans ce cas, il est clair que f est continue (choisir $y = x_0$).

Exemples

1. On vérifie que l'application $f\colon \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$. On a : $|f(x)-f(y)| = \frac{1}{|xy|}|x-y| \leq |x-y|$ donc $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x-y| < \varepsilon$.

2. Par contre l'application $\begin{array}{rcl} g\colon \left]0,+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ n'est uniformément continue, car :
$\left|g(\frac{1}{n})-g(\frac{2}{n})\right| = n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ malgré le fait que $\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (raisonner par l'absurde).

Théorème (« *théorème de Heine* »)
Soit $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $a<b$.
L'application f est uniformément continue.

DÉMONSTRATION
On suppose, par l'absurde, que f n'est pas uniformément continue.
Il existe $\varepsilon_0>0$ tel que : $\forall\alpha>0 \quad \exists x,y\in[a,b] \quad |x-y|<\alpha$ et $|f(x)-f(y)|\geq\epsilon_0$.
Le choix de $\alpha=\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N}\backslash\{0\})$ fournit l'existence de $x_n,y_n\in[a,b]$ tels que $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ et $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon_0$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne ensuite l'existence d'une suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ extraite de $(x_n)_{n\geq 0}$ qui converge. On pose : $x=\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}\in[a,b]$.
On a : $x_{n_k}-\frac{1}{n_k}\leq y_{n_k}\leq x_{n_k}+\frac{1}{n_k}$ pour tout $k\geq 1$, donc $y_{n_k}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Comme f est continue en x, on en déduit que : $f(x_{n_k})\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et $f(y_{n_k})\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. En passant à la limite dans l'inégalité $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon_0$, on trouve : $0\geq\varepsilon_0$; contradiction. □

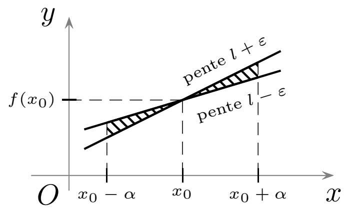
II. DÉRIVABILITÉ

1. Généralités

Définition-Proposition
Soient $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0\in I$ et $l\in\mathbb{R}$.
(a) On suppose que x_0 n'est pas une borne de I.
On dit que f *est dérivable en* x_0 *et* $\underbrace{f'(x_0)}_{ou\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\big|_{x=x_0}}=l$ si : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\underset{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}{\longrightarrow} l$.
$\leftarrow /\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}=2x$ *mais* $(\cancel{x^2})'=2x/$
Cela équivaut à l'existence d'une application $\varepsilon\colon \underset{\text{intervalle ouvert contenant 0}}{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$$x_0+h\in I \text{ et } f(x_0+h)=f(x_0)+hl+h\varepsilon(h) \text{ pour tout } h\in J, \text{ avec } \varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0.$$
(b) On dit que f *a une dérivée à droite (resp. à gauche) en* x_0 *et* $f'_d(x_0)=l$ *(resp.* $f'_g(x_0)=l$*)* si : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} l$ (resp. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} l$).
(c) On dit que f *est dérivable* si elle est dérivable en tout point de I qui n'est pas borne de I et elle a une dérivée d'un coté, encore notée $f'(b)$, en tout point b de I qui est borne de I.
Dans ce cas, la dérivée de f est l'application $f'\colon I\to\mathbb{R}$ qui envoie x sur $f'(x)$.

Remarques (notation ci-dessus)
1. En passant à la limite dans $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $(x\neq x_0)$, on obtient :
$\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ alors } f \text{ est continue en } x_0}$.

2. Dans le cas où x_0 n'est pas une borne de I, l'application f a une dérivée en x_0 et $f'(x_0)=l$ si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que le graphe de $f|_{]x_0-\alpha,x_0+\alpha[}$ est inclus dans la partie hachurée ci-contre.



3. La définition de $f'(x_0)$ se généralise au cas d'une application $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ en remplaçant simplement $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. Ainsi, en posant $f(x)=\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{g(x)}}+\mathrm{i}\,\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{h(x)}}$ quand $x\in I$, on a :
f est dérivable en x_0 si et seulement si g et h le sont ; dans ce cas : $f'(x_0)=g'(x_0)+\mathrm{i}\,h'(x_0)$.

Proposition

(a) Soient $f, g\colon \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en x_0.

On a : $\underbrace{(f+g)'(x_0)}_{\text{existe}} = f'(x_0) + g'(x_0)$, $\underbrace{(fg)'(x_0)}_{\text{existe}} = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$,

et $\underbrace{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)}_{\text{existe}} = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ quand $g(x_0) \neq 0$.

(b) Soient $f\colon \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g\colon \underset{\text{intervalle ouvert}}{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subseteq J$, et $x_0 \in I$.
On suppose que : f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$.

On a : $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.
[À la physicienne en posant $y = f(x)$ et $z = g(y)$, on a : $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.]

(c) Soient $f\colon \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue strictement monotone et $x_0 \in I$.

On suppose que : f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$.

On note par <u>abus</u> "f^{-1}" la réciproque de la bijection $\begin{array}{l} : I \to f(I) \\ \;\; x \mapsto f(x) \end{array}$ et pose $y_0 = f(x_0)$.

On a : $f(I)$ est un intervalle ouvert, f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$.
$\left[\text{À la physicienne en posant } y = f(x), \text{ on a : } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.\right]$

Démonstration

(a) On a : $\left|\begin{array}{l} f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h) \;\text{ avec }\; \varepsilon_1(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0\,; \\ g(x_0+h) = g(x_0) + hg'(x_0) + h\varepsilon_2(h) \;\text{ avec }\; \varepsilon_2(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{array}\right.$

Donc : $\left|\begin{array}{l} (f+g)(x_0+h) = f(x_0) + g(x_0) + h\,(f'(x_0) + g'(x_0)) + h\,(\underbrace{\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0})\,; \\ (fg)(x_0+h) = f(x_0)\,g(x_0) + h\,(f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)) + h\,(\underbrace{\cdots}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0}). \end{array}\right.$

Quand $g(x_0) \neq 0$, on a : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ avec $\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x)\,g(x_0)}\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \underset{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}}{\longrightarrow} \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$,
en supposant x est suffisamment proche de x_0 pour que $g(x) \neq 0$.

(b) On a : $\left|\begin{array}{l} f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h) \;\text{ avec }\; \varepsilon_1(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0\,; \\ g(f(x_0)+k) = g(f(x_0)) + kg'(f(x_0)) + k\varepsilon_2(k) \;\text{ avec }\; \varepsilon_2(k) \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{array}\right.$

Donc : $(g \circ f)(x_0+h) = g(f(x_0)) + h\,g'(f(x_0)) \times f'(x_0) + h\,\varepsilon_3(h)$, où

$$\varepsilon_3(h) := g'(f(x_0)) \times \varepsilon_1(h) + (f'(x_0) + \varepsilon_1(h)) \times \varepsilon_2\big(hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h)\big) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

(c) On sait que f^{-1} est continue et que $f(I)$ est un intervalle ouvert. Soit $y \in J$.
On a, en posant $x = f^{-1}(y)$: $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \underset{\substack{y\to y_0 \\ y\neq y_0}}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)}$. D'où le résultat. □

Exemple

Le (c) permet de prouver les formules qui avaient été admises pour les dérivées de exp, arcsin, arccos, et arctan. ←[s'assurer que les étudiants savent retrouver arcsin′, arccos′, et arctan′]

Par exemple, on a : $\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^u}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}\ln v}{\mathrm{d}v}\right|_{v=\mathrm{e}^u}} = \mathrm{e}^u$ pour $u \in \mathbb{R}$

Soit $z = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{x}} + \mathrm{i}\,\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{y}} \in \mathbb{C}$. On pose : $\exp z := \mathrm{e}^x\,(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$.

On déduit de ce qui précède que : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tz)) = z\,\exp(tz)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

2. <u>Dérivées successives</u>

Définition

Soient $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(a) Par convention, f est toujours 0-dérivable et $f^{(0)} := f$.
Si $n \geq 0$, on dit que f est n-fois dérivable si f est dérivable et f' est $n-1$-fois dérivable. (∗)
Dans ce cas, on note : $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.

(b) On dit que f *est de classe* C^n si f est n-fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue.
On dit que f *est de classe* C^∞ si f est k-fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarques

On se donne $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dans les trois cas qui suivent, on pourra remplacer « n-fois dérivable » par « de classe C^n » ou par « de classe C^∞ ».

(a) On constate tout de suite par récurrence qu'une somme, un produit, un quotient (avec un dénominateur qui ne s'annule pas) de deux fonctions n-fois dérivables est n-fois dérivable.

(b) De même, si $f\colon \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g\colon \underset{\text{intervalle ouvert}}{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subseteq J$ sont n-fois dérivables, alors $g \circ f$ est n-fois dérivable.

(c) Enfin, si $f\colon \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est n-fois dérivable et strictement monotone avec f' qui ne s'annule pas, alors la réciproque de la bijection $x \mapsto f(x)$ de I dans $f(I)$ est n-fois dérivable.

Proposition (« formule de Leibniz »)

Soient $f, g\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications n-fois dérivable avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On a : fg est n-fois dérivable et $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Démonstration

On effectue une récurrence sur n.

(i) On a : $(fg)^{(0)} = fg = f^{(0)}g^{(0)}$.

(ii) On suppose la formule vraie pour un certain $n \geq 0$. On a :

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} f^{(k')} g^{(n-k'+1)}$$

$$\overset{\text{CV } k+1 = l \text{ et } k' = l}{=} \underbrace{\binom{n}{0}}_{\binom{n+1}{0}} fg^{(n+1)} + \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}\right)}_{\binom{n+1}{l}} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\binom{n+1}{n+1}} f^{(n+1)} g. \qquad \square$$

3. Théorème de Rolle

Notation

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > b$. On pose $[a, b] := [b, a]$ et $]a, b[:=]b, a[$.

Théorème (« *théorème de Rolle* »)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ distincts.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$. (∗)
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

(∗) Plus rigoureusement, l'ensemble D_n des applications n-fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ se définit par récurrence : D_0 est l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ et, lorsque $n \geq 1$, D_n est l'ensemble des applications dérivables $g\colon I \to \mathbb{R}$ telles que $g' \in D_{n-1}$.

(∗) On dira qu'une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue (resp. dérivable) sur un intervalle infini I inclus dans D si sa restriction à I est continue (resp. dérivable). Lorsque $I = D$ ou I est un intervalle ouvert, cela signifie que f est continue (resp. dérivable) en tout point de I.

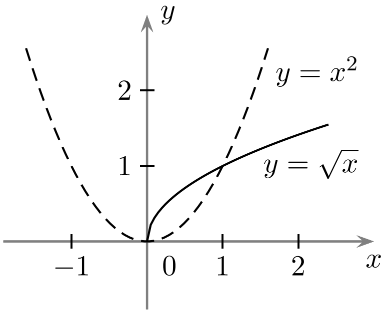
Démonstration

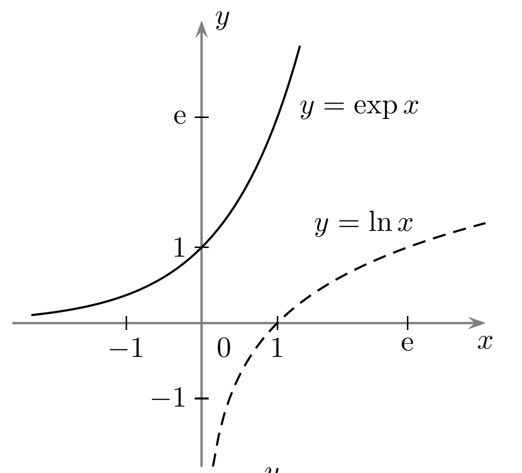
- Si f est constante, on a $f' = 0$, et le milieu c de $[a,b]$ convient.
- Sinon, il existe $t \in [a,b]$ tel que $f(t) \neq f(a)$.

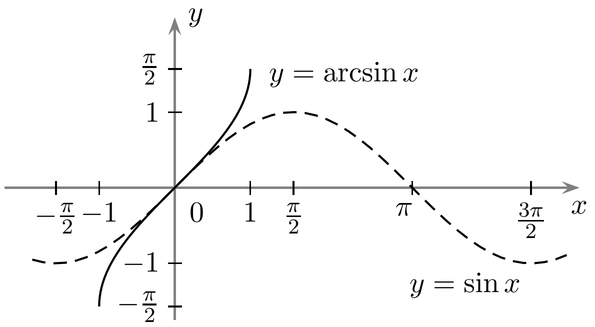
On se place dans le cas où $f(t) > f(a)$ $\big($même méthode pour $f(t) < f(a)\big)$.

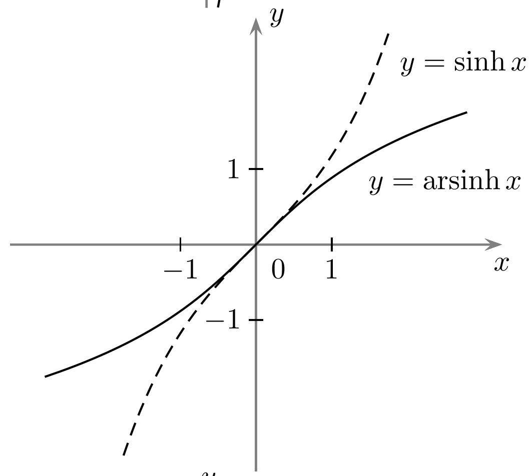
Comme f est continue, son image $f([a,b])$ est un segment $[m,M]$ avec $m \leq M$. Il existe $c \in [a,b]$ tel que $M = f(c)$. On a : $M \geq f(t) > f(a) = f(b)$ donc $c \in]a,b[$. D'où : $f'(c) = (f|_{]a,b[})'(c) = 0$. □

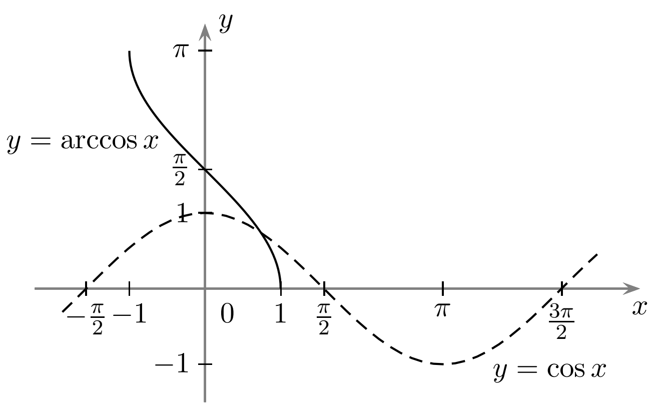
Annexe : graphes de certaines fonctions usuelles

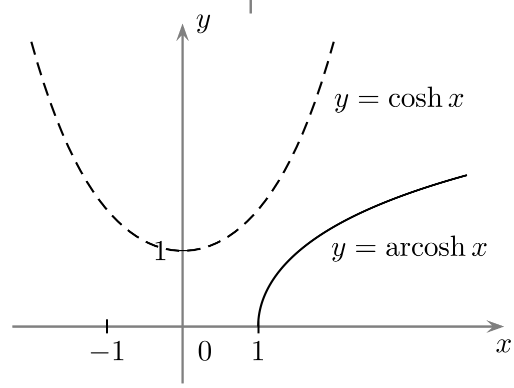


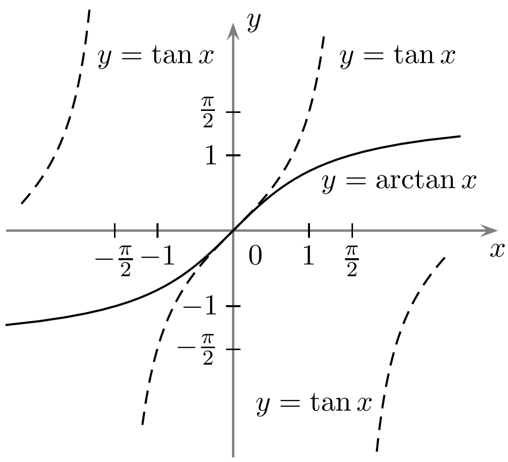


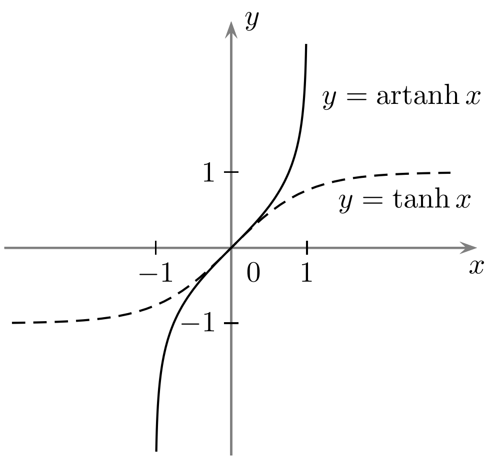










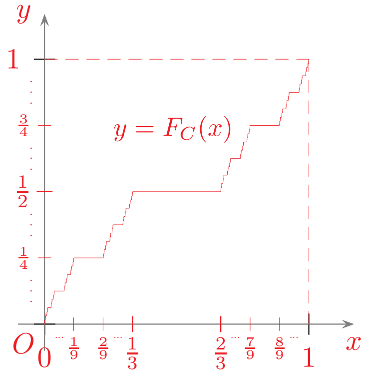


Ch. 2. Intégrale de Riemann

<u>Plan</u>
I. Intégrale de Riemann d'une fonction continue
II. Calcul de primitives

L'escalier de Cantor dessiné ci-contre est le graphe d'une certaine application continue $F_C : [0,1] \to \mathbb{R}$ croissante de 0 à 1 :

L'application F_C est dérivable « presque partout » (ici sur une réunion d'intervalles ouverts de $[0,1]$ deux à deux disjoints dont la somme des longueurs est égale à 1) avec une dérivé nulle.



En un certain sens : $F_C(x) \neq \int_0^x F_C'(t)\,\mathrm{d}t + F_C(0)$ pour $x \neq 0$, car F_C' *n'est pas définie partout.*
[En fait une fonction dérivable sur $[0,1]$ et de dérivée bornée est « l'intégrale de Lebesgue de sa dérivée ».]
Cependant, si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, on verra que : $f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ quand $x \in [0,1]$.
[Plus généralement : si $f \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ alors $f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ presque partout. Ainsi, la fonction F_C « est » la fonction de répartition d'une probabilité sur $\mathbb{R}$, sans atomes, qui n'est pas à densité.]
Il en résultera que si $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ est C^1, on a : $F(x) = \int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t + F(0)$ pour $x \in [0,1]$.

Dans tout ce chapitre on fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

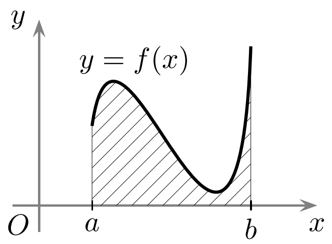
I. Intégrale de Riemann d'une fonction continue

1. <u>Construction</u>

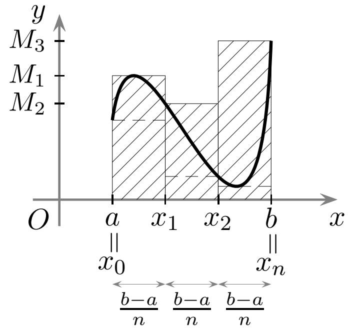
Idée

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose pour simplifier que $f \geq 0$.

On cherche à donner un sens à l'aire de la partie hachurée suivante :



On va l'approximer par l'aire $\mathcal{A}_n$ de la partie minimale suivante qui couvre le graphe de f :

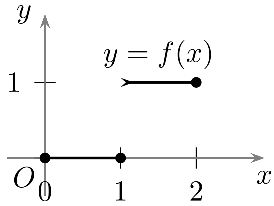


(ici : $n = 3$)

Problèmes : la suite $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle ? la suite $(\mathfrak{a}_n)_{n\geq 1}$ obtenue avec les pointillés en remplaçant $M_k := \sup\limits_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x)$ par $m_k := \inf\limits_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x)$ aussi ? vers la même limite ?

Exemples

(1) On choisit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ avec le graphe suivant :



Ici : $\mathcal{A}_1 = 2$, $\mathcal{A}_2 = 1$, $\mathcal{A}_3 = \frac{4}{3}$, $\mathcal{A}_4 = 1$.

[La suite $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ n'est donc pas monotone. Par contre la suite $(\mathcal{A}_{2^n})_{n\geq 0}$ est toujours décroissante.]

(2) On choisit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, ce qui s'écrit $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}|_{[0,1]}$.

[Pour toute application $f : \underset{\text{ensemble}}{E} \to \underset{\text{ensemble}}{F}$ et toute partie A de E, on note $f|_A : \begin{array}{l} A \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$.]

On a : $x_0 = \frac{0}{n} = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, ..., $x_n = \frac{n}{n} = 1$, donc $M_1 = ... = M_n = 1$ puis $\mathcal{A}_n = 1$.
On a aussi : $x_0 \leq x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}n} \leq x_1 \leq x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}n} \leq ... \leq x_n$, donc $m_1 = ... = m_n = 0$ puis $\mathfrak{a}_n = 0$.

[Le calcul de m_k utilise le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Cela se démontre par l'absurde. Sinon $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ où b est minimal, puis $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2b}{a} = \frac{2b-a}{a-b}$ avec $0 < a-b < b$; d'où une contradiction.]

On généralise le cas de l'exemple 1.

Définition 1

On dit qu'une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *en escalier* s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et des réels $\alpha_0 = a < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N = b$ tels que : f est constante sur chacun des intervalles $]\alpha_0, \alpha_1[$, $]\alpha_1, \alpha_2[$, ..., $]\alpha_{N-1}, \alpha_N[$.

[L'application $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ de l'exemple 1 ci-dessus est bien en escalier car : $f|_{]0,1[} = 0$ et $f|_{]1,2[} = 1$.]

Définition 2 (hors programme)

On dit qu'une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si f est bornée, et, les sommes « de Darboux » $(x_1 - x_0)m_1 + \cdots + (x_n - x_{n-1})m_n$ et $(x_1 - x_0)M_1 + \cdots + (x_n - x_{n-1})M_n$ où $m_k = \inf\limits_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x)$ et $M_k = \sup\limits_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x)$ $(1 \leq k \leq n)$, associées à $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$, convergent vers une même limite quand $\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) \to 0$.

Dans ce cas, on note :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) \to 0} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\,m_k = \lim_{\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) \to 0} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\,M_k.^{(*)}$$

[Plus précisément étant donné $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$, « f est intégrale et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{I}$ » signifie que f est bornée, et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tous réels $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ vérifiant $\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) < \alpha$, on a :

$$\mathcal{I} - \varepsilon < \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\,m_k \text{ et } \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\,M_k < \mathcal{I} + \varepsilon.]$$

[Critère de Lebesgue : f est Riemann-intégrable si et seulement elle est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable. Voir la page 218 du tome 3 de Ramis, Deschamps, Odoux.]

(∗) Il s'agit ici de l'intégrale « au sens de Riemann ». L'unicité de la limite pour la notion de limite proposée (qui deviendra claire au moment de l'intervention des « sommes de Riemann ») donne un sens à l'intégrale.

Lemme 1

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier, associée à une « subdivision » $\alpha_0=a<\alpha_1<\cdots<\alpha_N=b$. Alors : f est intégrable et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(\alpha_1-\alpha_0)c_1+\cdots+(\alpha_N-\alpha_{N-1})c_N$ où $f|_{]\alpha_{i-1},\alpha_i[}=c_i$.

Démonstration

On pose $M:=\max(|c_1|,...,|c_N|,|f(\alpha_0)|,..,|f(\alpha_N)|)$. On a $|f|\leq M$, donc f est bornée.

Soient $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b$ tels que $\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k-x_{k-1})<\min\limits_{1\leq i\leq N}(\alpha_i-\alpha_{i-1})$. On introduit $u_0=0<...<u_N=n$ tels que :

$$x_{u_0}=a<...<x_{u_1-1}<\alpha_1\leq x_{u_1}<...<x_{u_{N-1}-1}<\alpha_{N-1}\leq x_{u_{N-1}}<...<x_{u_N}=b.$$

Si $1\leq i\leq N$ et $k\in\{u_{i-1}+1,...,u_i\}$, $k\neq u_{i-1}+1$ et $k\neq u_i$, alors $[x_{k-1},x_k]\subseteq\,]\alpha_{i-1},\alpha_i[$. On en déduit : $\sum\limits_{u_{i-1}+1<k<u_i}(x_k-x_{k-1})\,m_k=\sum\limits_{u_{i-1}+1<k<u_i}(x_k-x_{k-1})\,M_k=(x_{u_i-1}-x_{u_{i-1}+1})c_i$.

Ainsi : $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\,m_k-\sum\limits_{i=1}^{N}(\alpha_i-\alpha_{i-1})\,c_i=\sum\limits_{i=1}^{N}\Big(\sum\limits_{k=u_{i-1}+1}^{u_i}(x_k-x_{k-1})\,m_k-(\alpha_i-\alpha_{i-1})\,c_i\Big)$

$=\sum\limits_{i=1}^{N}\big((x_{u_{i-1}+1}-x_{u_{i-1}})\,m_{u_{i-1}+1}+(x_{u_i}-x_{u_i-1})\,m_{u_i}-(x_{u_{i-1}}-\alpha_{i-1})\,c_i-(x_{u_{i-1}+1}-x_{u_{i-1}})\,c_i-(\alpha_i-x_{u_i-1})\,c_i\big)$

puis : $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\,m_k-\sum\limits_{i=1}^{N}(\alpha_i-\alpha_{i-1})\,c_i\right|\leq 5NM\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k-x_{k-1})$.

On dispose du même majorant en remplaçant m_k par M_k. D'où le résultat. □

Remarques

(1) La définition 2 est-elle compatible avec l'idée du début ?

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrable.

Pour chaque $n\geq1$, les réels $\underbrace{a}_{x_0}<\underbrace{a+\frac{b-a}{n}}_{x_1}<\underbrace{a+2\,\frac{b-a}{n}}_{x_2}<\cdots<\underbrace{a+(n-1)\,\frac{b-a}{n}}_{x_{n-1}}<\underbrace{b}_{x_n}$

vérifient : $\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k-x_{k-1})=\frac{b-a}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Les sommes $(\mathfrak{a}_n)_{n\geq1}$ et $(\mathcal{A}_n)_{n\geq1}$ associées convergent donc vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$(\star)\left\{\begin{array}{ll} & \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\inf\limits_{a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}\leq x\leq a+k\,\frac{b-a}{n}}f(x)\Big)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\ \text{et} & \\ & \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sup\limits_{a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}\leq x\leq a+k\,\frac{b-a}{n}}f(x)\Big)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{array}\right..$$

(2) Dans l'exemple 2 du début, avec $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}|_{[0,1]}$, les limites des membres de gauche de $(\star)$ sont égales à 0 et 1. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}|_{[0,1]}$ n'est donc pas intégrable (au sens de Riemann).

Définition-Proposition

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrable.

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ s'appelle *la valeur moyenne de f sur $[a,b]$*.

On a : $$\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{valeur moyenne de } f \text{ sur } [a,b]}=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\big(a+k\,\tfrac{b-a}{n}\big)}_{\text{moyenne de } f(a+\frac{b-a}{n}),\,...,\,f(a+n\,\frac{b-a}{n})}.$$

Démonstration

Les égalités $(\star)$ de la remarque 1 permettent d'appliquer le théorème des gendarmes. □

Définition-Proposition (résultats admis)

Soient $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continues.

(a) [hors programme] On associe à chaque $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ les réels $x_k=a+k\,\frac{b-a}{n}$ pour $0\leq k\leq n$, $M_k=\sup\limits_{x_{k-1}\leq x\leq x_k}f(x)$ et $m_k=\inf\limits_{x_{k-1}\leq x\leq x_k}f(x)$ pour $1\leq k\leq n$, puis $\mathcal{A}_n=(x_1-x_0)M_1+\cdots+(x_n-x_{n-1})M_n$ et $\mathfrak{a}_n=(x_1-x_0)m_1+\cdots+(x_n-x_{n-1})m_n$.

Les suites $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ et $(\mathfrak{a}_n)_{n\geq 1}$ convergent vers une même limite, qu'on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. On pose : $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $c \in [a,b]$.

(b) L'intégrale sur $[a,b]$ vérifie les propriétés suivantes : (*)

(i) $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b-a$ et $\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ quand $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

(ii) si $f\leq g$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

(iii) $\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + \int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x$ quand $u,v,w\in[a,b]$ (« relation de Chasles »).

2. Propriétés de l'intégrale

Proposition 1

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ des applications intégrables.

(a) Si $f\leq g$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Si $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $\alpha f+\beta g$ est intégrable et $\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration

(a) On suppose que $f\leq g$. Donc $f\big(a+k\,\frac{b-a}{n}\big)\leq g\big(a+k\,\frac{b-a}{n}\big)$ pour $n\geq 1$ et $k\in\{1,\dots,n\}$. La définition-proposition précédente donne ensuite : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Il suffit de vérifier que αf est intégrable et que $f+g$ est intégrable.

On a (notations claires) : $\left|\begin{array}{l} \text{si } \alpha\geq 0 : \; m_k(\alpha f) = \alpha\, m_k(f) \text{ et } M_k(\alpha f) = \alpha\, M_k(f) ;\\ \text{si } \alpha<0 : \; m_k(\alpha f) = \alpha\, M_k(f) \text{ et } M_k(\alpha f) = \alpha\, m_k(f). \end{array}\right.$

Vu la définition de l'intégralité, on obtient : αf est intégrable et $\int_a^b(\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Les inégalités $m_k(f)+m_k(g)\leq (f+g)(x)\leq M_k(f)+M_k(g)$ pour tout $x\in[x_{k-1},x_k]$ montrent que : $m_k(f)+m_k(g)\leq m_k(f+g)\leq M_k(f+g)\leq M_k(f)+M_k(g)$.
En utilisant le théorème des gendarmes au niveau des sommes de Darboux, on en déduit que : $f+g$ est intégrable et $\int_a^b(f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. □

Corollaire

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application intégrable. On pose $m=\inf\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$ et $M=\sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$.

(a) On a : $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$.

(b) Soit $\widetilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ qui coïncide avec f en dehors d'un ensemble fini.
Alors : $\widetilde{f}$ est intégrable et $\int_a^b \widetilde{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration

(a) On a $m\leq f\leq M$. Donc $(b-a)\,m\leq\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq(b-a)\,M$ par la proposition 1 (a), car $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b-a$ (intégrale de fonction en escalier), ce qui donne la double-inégalité.

(b) L'application $\widetilde{f}$ est somme de f avec une combinaison linéaire de $\mathbb{1}_{\{\alpha\}}$, où $\alpha\in[a,b]$. De plus chaque application en escalier $\mathbb{1}_{\{\alpha\}}$ est intégrable d'intégrale nulle. D'après la proposition 1 (b), $\widetilde{f}$ est intégrable et son intégrale est égale à celle de f. □

Lemme 2

Une application $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si il existe des suites $(\varphi_p)_{p\geq 0}$ et $(\psi_p)_{p\geq 0}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant :

$$\varphi_p\leq f\leq\psi_p \text{ pour tout } p\geq 0, \text{ et } \int_a^b(\psi_p(x)-\varphi_p(x))\,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans ce cas : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b\varphi_p(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b\psi_p(x)\,\mathrm{d}x$.

(*) Le « théorème fondamental de l'intégration » qui s'en déduira, montrera que, lorsqu'on fait varier a et b, les propriétés (i), (ii), (iii) pour $u=a\leq v\leq w=b$, déterminent l'intégrale des fonctions continues sur $[a,b]$.

Démonstration (on constatera dans ($\Rightarrow$) que l'idée du début implique l'intégralité)

On notera ici, en se référant aux objet qui interviennent dans la définition de l'intégralité : $\mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_n)}(f) = \sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\, m_k$ et $\mathcal{I}^+_{(x_1,\ldots,x_n)}(f) = \sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\, M_k$ quand f est bornée.

($\Longrightarrow$) On suppose f intégrable et note $\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Soit $p \geq 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que :
$\mathcal{I} - \frac{1}{p+1} < \mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_n)}(f) \leq \mathcal{I}^+_{(x_1,\ldots,x_n)}(f) < \mathcal{I} + \frac{1}{p+1}$ dès que $\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) < \alpha$.

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ minimal tel que $\frac{b-a}{n}$ puisse convenir pour α. On choisit $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$. On construit les fonctions en escalier φ_p et ψ_p suivantes :

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} m_k & \text{si } x \in \,]x_{k-1}, x_k[\ (1 \leq k \leq n) \\ f(x_k) & \text{si } x = x_k \ (0 \leq k \leq n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_p(x) = \begin{cases} M_k & \text{si } x \in \,]x_{k-1}, x_k[\ (1 \leq k \leq n) \\ f(x_k) & \text{si } x = x_k \ (0 \leq k \leq n) \end{cases}.$$

On a $\varphi_p \leq f \leq \psi_p$. D'autre part $\int_a^b \varphi_p(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_n)}(f)$ et $\int_a^b \psi_p(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}^+_{(x_1,\ldots,x_n)}(f)$.
Ainsi $0 \leq \int_a^b(\psi_p(x) - \varphi_p(x))\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}^+_{(x_1,\ldots,x_n)}(f) - \mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_n)}(f) < (\mathcal{I} + \frac{1}{p+1}) - (\mathcal{I} - \frac{1}{p+1})$,
enfin $\int_a^b(\psi_p(x) - \varphi_p(x))\,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par le théorème des gendarmes.

($\Longleftarrow$) On suppose données deux suites $(\varphi_p)_{p\geq 0}$ et $(\psi_p)_{p\geq 0}$ comme dans l'énoncé.

On a : $\varphi_0 \leq f \leq \psi_0$ où φ_0 et ψ_0 sont en escalier et a fortiori bornées (d'après le lemme 1). Les inégalités $\inf\limits_{a\leq x\leq b}\varphi_0(x) \leq f \leq \sup\limits_{a\leq x\leq b}\psi_0(x)$ montrent que f est bornée.

On va construire le candidat pour $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme limite d'une suite de Cauchy.

Soit $p \geq 0$. Par hypothèse : $\varphi_p \leq f \leq \psi_p$. On retranche à chaque membre $\frac{\varphi_p+\psi_p}{2}$ et obtient les inégalités $-\big(\frac{\psi_p-\varphi_p}{2}\big) \leq f - \frac{\varphi_p+\psi_p}{2} \leq \frac{\psi_p-\varphi_p}{2}$, puis : $\left|f - \frac{\varphi_p+\psi_p}{2}\right| \leq \frac{\psi_p-\varphi_p}{2}$.

Soit $q > p$. On a : $\left|\frac{\varphi_p+\psi_p}{2} - \frac{\varphi_q+\psi_q}{2}\right| \leq \left|\frac{\varphi_p+\psi_p}{2} - f\right| + \left|f - \frac{\varphi_q+\psi_q}{2}\right| \leq \frac{1}{2}(\psi_p-\varphi_p) + \frac{1}{2}(\psi_q-\varphi_q)$.
La fonction $g := \frac{\varphi_p+\psi_p}{2} - \frac{\varphi_q+\psi_q}{2}$ est en escalier, donc sa valeur absolue aussi. On applique le (a) de la proposition 1 à partir des inégalités $-|g| \leq g \leq |g|$:

$$\left|\int_a^b \frac{\varphi_p(x)+\psi_p(x)}{2}\,\mathrm{d}x - \int_a^b \frac{\varphi_q(x)+\psi_q(x)}{2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \left|\frac{\varphi_p(x)+\psi_p(x)}{2} - \frac{\varphi_q(x)+\psi_q(x)}{2}\right|\mathrm{d}x$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_a^b(\psi_p(x) - \varphi_p(x))\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b(\psi_q(x) - \varphi_q(x))\,\mathrm{d}x.$$

Comme le majorant tend vers 0 quand $p \to +\infty$, la suite $\left(\int_a^b \frac{\varphi_p(x)+\psi_p(x)}{2}\,\mathrm{d}x\right)_{p\geq 1}$ est de Cauchy. On note $\mathcal{I}$ sa limite. En lui ajoutant $\mp \lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b \frac{\psi_p(x)-\varphi_p(x)}{2}\,\mathrm{d}x$, qui vaut 0, on obtient :

$$\mathcal{I} = \lim_{p\to+\infty}\int_a^b \varphi_p(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi_p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il reste à voir que f est intégrable d'intégrale $\mathcal{I}$. Soit $\varepsilon > 0$.

Par construction de $\mathcal{I}$, il existe $p_0 \geq 0$ tel que $\int_a^b \varphi_{p_0}(x)\,\mathrm{d}x > \mathcal{I} - \frac{\varepsilon}{4}$. Par intégrabilité de φ_{p_0}, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_n)}(\varphi_{p_0}) > \int_a^b \varphi_{p_0}(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{4}$ dès que $\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) < \alpha$.
Soit $n' \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ minimal tel que $\frac{b-a}{n'} < \alpha$. On choisit $x'_k = a + k\,\frac{b-a}{n'}$ pour $0 \leq k \leq n'$.
On a $f \geq \varphi_{p_0}$, donc grâce au choix des x'_k : $\mathcal{I}^-_{(x'_1,\ldots,x'_n)}(f) \geq \mathcal{I}^-_{(x'_1,\ldots,x'_n)}(\varphi_{p_0}) > \mathcal{I} - \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.
Dans cette situation générale, quand $1 \leq i \leq n$ et $x_{i-1} < \widetilde{x} < x_i$, on a :

$$\mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\widetilde{x},x_i,\ldots,x_n)}(f) - \mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_n)}(f)$$
$$= (\widetilde{x} - x_{i-1})\Big(\inf_{x_{i-1}\leq x\leq\widetilde{x}} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)\Big) + (x_i - \widetilde{x})\Big(\inf_{\widetilde{x}\leq x\leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)\Big),$$

donc $0 \leq \mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\widetilde{x},x_i,\ldots,x_n)}(f) - \mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_n)}(f) \leq \max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})\Big(\sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x) - \inf\limits_{a\leq x\leq b} f(x)\Big)$.

On pose : $\{y_1, \ldots, y_m\} := \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x'_1, \ldots, x'_{n'}\}$ où $y_0 := a < y_1 < \cdots < y_m = b$.
Par ce qui précède, on a : $\mathcal{I}^-_{(y_1,\ldots,y_m)}(f) \geq \mathcal{I}^-_{(x'_1,\ldots,x'_n)}(f) > \mathcal{I} - \frac{\varepsilon}{2}$
et $\mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_n)}(f) \geq \mathcal{I}^-_{(y_1,\ldots,y_m)}(f) - n'\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})\Big(\sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x) - \inf\limits_{a\leq x\leq b} f(x)\Big)$

donc $\mathcal{I}^-_{(x_1,\ldots,x_n)}(f) > \mathcal{I}-\varepsilon$ dès que $n' \max\limits_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})\big(\sup\limits_{a\le x\le b} f(x) - \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, avec une autre condition sur $\max\limits_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$ on aurait : $\mathcal{I}^+_{(x_1,\ldots,x_n)}(f) < \mathcal{I}+\varepsilon$.

On peut en conclure que f est intégrable d'intégrale $\mathcal{I}$. □

Convention

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrable.
On pose : $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $c\in[a,b]$.

Proposition 2

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrable.

(a) L'application $|f|$ est intégrable et $\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$.

(b) Les restrictions $f|_{[c,d]}$, avec $c,d\in[a,b]$ tels que $c<d$, sont intégrables.
On a : $\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + \int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x$ quand $u,v,w\in[a,b]$ (« relation de Chasles »).

Démonstration

On se donne comme dans le lemme 2 des suites $(\varphi_p)_{p\ge0}$ et $(\psi_p)_{p\ge0}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $\varphi_p\le f\le\psi_p$ pour tout $p\ge0$, et $\int_a^b(\psi_p(x)-\varphi_p(x))\,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(a) Il découle de l'inégalité triangulaire que : $||u|-|v||\le|u-v|$ pour tous $u,v\in\mathbb{R}$. Donc :
$||f|-|\frac{\varphi_p+\psi_p}{2}|| \le |f-\frac{\varphi_p+\psi_p}{2}| \underbrace{\le}_{\text{vu dans la dém du lemme 2}} \frac{\psi_p-\varphi_p}{2}$ puis $\underbrace{|\frac{\varphi_p+\psi_p}{2}|-\frac{\psi_p-\varphi_p}{2}}_{\widetilde{\varphi}_p} \le |f| \le \underbrace{|\frac{\varphi_p+\psi_p}{2}|+\frac{\psi_p-\varphi_p}{2}}_{\widetilde{\psi}_p}$
où $\widetilde{\varphi}_p$ et $\widetilde{\psi}_p$ sont en escalier, et vérifient $\int_a^b(\widetilde{\psi}_p(x)-\widetilde{\varphi}_p(x))\,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi $|f|$ est intégrable. Comme $-|f|\le f\le|f|$, l'inégalité découle de la proposition 1.

(b) Sous réserve d'intégrabilité l'égalité relative à (u,v,w) équivaut, en faisant passer la bonne intégrale à gauche, à celles relatives à (v,u,w) et à (u,w,v). Puis aux trois autres possibles, en permutant simultanément les trois couples de bornes. On peut donc supposer, en écartant les cas immédiats d'égalité de deux des trois bornes, que $u<v<w$.

Soit $c\in\,]a,b[$. On se contente de démontrer que les restrictions $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont intégrables avec une somme d'intégrales égales à l'intégrale de f. On remarque tout d'abord que lorsque f est en escalier, $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont aussi en escalier, et l'égalité découle du lemme 1.

On a $\varphi_p|_{[a,c]} \le f|_{[a,c]} \le \psi_p|_{[a,c]}$ avec $0\le\int_a^c(\psi_p(x)-\varphi_p(x))\,\mathrm{d}x \underset{\text{Chasles en escalier}}{\le} \int_a^b(\psi_p(x)-\varphi_p(x))\,\mathrm{d}x$.
Comme le majorant a pour limite 0 : $f|_{[a,c]}$ est intégrable et $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^c\varphi_p(x)\,\mathrm{d}x$.
De même, $f|_{[c,b]}$ est intégrable et $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{p\to+\infty}\int_c^b\varphi_p(x)\,\mathrm{d}x$. On en déduit que :
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\text{Chasles en escalier}}{=} \lim\limits_{p\to+\infty}\big(\int_a^c\varphi_p(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b\varphi_p(x)\,\mathrm{d}x\big) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Proposition 3 (« inégalité de Cauchy-Schwarz »)

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ des applications intégrables.
On a : fg est intégrable et $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}\,\sqrt{\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x}$.

Démonstration

• On vérifie que fg est intégrable. On notera $\|f\|_\infty$ et $\|g\|_\infty$ les maximums de $|f|$ et $|g|$.
Il existe des suites $(\varphi_p)_{p\ge0}$, $(\Phi_p)_{p\ge0}$, $(\psi_p)_{p\ge0}$, $(\Psi_p)_{p\ge0}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que : d'une part $\varphi_p\le f\le\Phi_p$ et $\psi_p\le g\le\Psi_p$ pour tout $p\ge0$, d'autre part $\int_a^b(\Phi_p(x)-\varphi_p(x))\,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\int_a^b(\Psi_p(x)-\psi_p(x))\,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On suppose dans un 1er temps que $(|\frac{\varphi_p+\Phi_p}{2}|)_{p\ge0}$ est majorée par $2\|f\|_\infty$. Par une inégalité de la démonstration du lemme 2, on a $|f-\frac{\varphi_p+\Phi_p}{2}|\le\frac{\Phi_p-\varphi_p}{2}$ et $|g-\frac{\psi_p+\Psi_p}{2}|\le\frac{\Psi_p-\psi_p}{2}$. D'où :

$\left|fg - \underbrace{\left(\frac{\varphi_p+\Phi_p}{2}\right)\left(\frac{\psi_p+\Psi_p}{2}\right)}_{u_p}\right| \leq \left|f - \frac{\varphi_p+\Phi_p}{2}\right||g| + \left|\frac{\varphi_p+\Phi_p}{2}\right|\left|g - \frac{\psi_p+\Psi_p}{2}\right| \leq \underbrace{\left(\frac{\Phi_p-\varphi_p}{2}\right)\|g\|_\infty + 2\|f\|_\infty\left(\frac{\Psi_p-\psi_p}{2}\right)}_{v_p}.$

On dispose ainsi de fonctions en escalier u_p et v_p vérifiant $u_p - v_p \leq fg \leq u_p + v_p$ pour $p \geq 0$, avec $\int_a^b 2\,v_p(x)\,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela montre que fg est intégrable.

Dans un 2e temps on se ramène au cas où $\left(\left|\frac{\varphi_p+\Phi_p}{2}\right|\right)_{p\geq 0}$ est majorée par $2\|f\|_\infty$. On pose : $(\widetilde{\varphi}_p(x), \widetilde{\Phi}_p(x)) = (\varphi_p(x), \Phi_p(x))$ si $\left(\frac{\Phi_p-\varphi_p}{2}\right)(x) \leq \|f\|_\infty$ et $(\widetilde{\varphi}_p(x), \widetilde{\Phi}_p(x)) = (-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty)$ sinon. Les fonctions $\widetilde{\varphi}_p$ et $\widetilde{\Phi}_p$ sont en escalier, et vérifient : $\widetilde{\varphi}_p \leq f \leq \widetilde{\Phi}_p$, et $0 \leq \widetilde{\Phi}_p - \widetilde{\varphi}_p \leq \Phi_p - \varphi_p$ donc $\int_a^b (\widetilde{\Phi}_p(x) - \widetilde{\varphi}_p(x))\,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En outre $\left|\frac{\varphi_p+\Phi_p}{2}\right| \leq |f| + \left|f - \frac{\varphi_p+\Phi_p}{2}\right| \leq \|f\|_\infty + \frac{\Phi_p-\varphi_p}{2}$.
D'où : $\left|\frac{\widetilde{\varphi}_p+\widetilde{\Phi}_p}{2}\right|(x) = \left|\frac{\varphi_p+\Phi_p}{2}\right|(x) \leq 2\|f\|_\infty$ si $\left(\frac{\Phi_p-\varphi_p}{2}\right)(x) \leq \|f\|_\infty$ et $\left|\frac{\widetilde{\varphi}_p+\widetilde{\Phi}_p}{2}\right|(x) = 0 \leq 2\|f\|_\infty$ sinon.

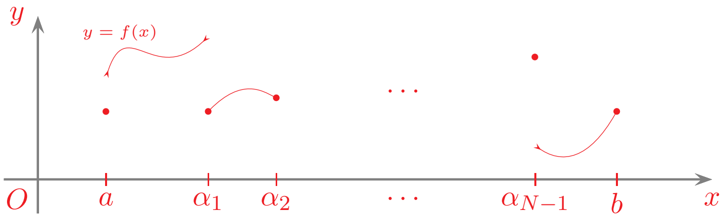
• On montre maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$P(t) = \int_a^b \left(t\,f(x) + g(x)\right)^2 \mathrm{d}x = t^2 \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x + 2t \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)^2 \mathrm{d}x$.
La fonction polynomiale P est à valeurs ≥ 0, donc constante ou de degré 2. Si elle est constante, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée. Si elle est de degré 2, son discriminant Δ s'écrit :
$\Delta = \left(2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)^2 \mathrm{d}x\right)$. L'inégalité $\Delta \leq 0$ donne le résultat. □

Question : peut-on considérer que l'application $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$ est « continue par morceaux » ?

Définition

On dit qu'une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* s'il existe un entier $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et des réels $\alpha_0 = a < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{N-1} < \alpha_N = b$ tels que pour chaque $i \in \{1, \ldots, N\}$ la restriction de f à $]\alpha_{i-1}, \alpha_i[$ se prolonge continûment à $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$.

[L'application h ne l'est pas. Les fonctions continues par morceaux sont les somme d'une fonction continue et d'une en escalier. En effet, la différence entre une f comme ci-dessus et la somme des prolongements continus des $f_i|_{]\alpha_{i-1},\alpha_i[}$ par des fonctions constantes hors de $]\alpha_{i-1}, \alpha_i[$, est en escalier.]



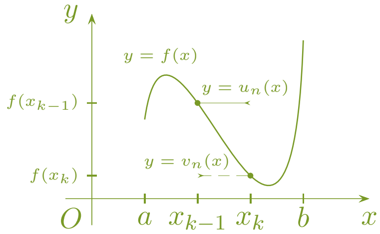
Proposition 4

(a) Toute application monotone sur $[a,b]$ est intégrable.

(b) Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable.

Démonstration (utilise le théorème de Heine)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pour chaque $n \geq 1$, on construit des fonctions en escalier u_n et v_n en posant :
$x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$;
$u_{n\,|[x_0,x_1[} = f(x_0)$, ..., $u_{n\,|[x_{n-1},x_n[} = f(x_{n-1})$, $u_n(b) = f(b)$;
$v_n(a) = f(a)$, $v_{n\,|]x_0,x_1]} = f(x_1)$, ..., $v_{n\,|]x_{n-1},x_n]} = f(x_n)$.



(a) On suppose f croissante (méthode analogue dans le cas où f décroît).

Pour tout $n \geq 1$ on constate que $u_n \leq f \leq v_n$ et
$\int_a^b (v_n(x) - u_n(x))\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\left(f(x_1) - f(x_0)\right) + \cdots + \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_{n-1})\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right)$,
donc $\int_a^b (v_n(x) - u_n(x))\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela montre que f est intégrable.

(b) Une application continue par morceaux sur $[a,b]$ est somme d'une fonction continue sur $[a,b]$ et d'une fonction en escalier sur $[a,b]$, cette dernière étant intégrable d'après le lemme 1.

On peut donc supposer que f est continue sur $[a,b]$. D'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur $[a,b]$. Soit $p \geq 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{1}{p+1} \qquad \text{dès que } |x-y| < \alpha.$$

Soit $n \geq 1$ minimal tel que $\frac{b-a}{n}$ puisse convenir pour α. On obtient donc $|f - u_n| \leq \frac{1}{p+1}$.
En notant $\varphi_p := u_n - \frac{1}{p+1}$ et $\psi_p := u_n + \frac{1}{p+1}$, cela s'écrit : $\varphi_p \leq f \leq \psi_p$.
Les fonctions en escalier φ_p et ψ_p vérifient aussi : $\int_a^b (\psi_p(x) - \varphi_p(x))\,\mathrm{d}x = (b-a)\,\frac{2}{p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que f est intégrable. □

Proposition

(a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
On a : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\,\frac{b-a}{n}\big)}_{\text{« somme de Riemann »}}$. (∗)

(b) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
Il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)$ « formule de la moyenne ».

Démonstration

(a) D'après la proposition 4 (b), f est intégrable. On applique la définition-proposition de la fin du paragraphe 1.

(b) On pose $m = \inf\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$ et $M = \sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$.

D'après un corollaire du début de ce paragraphe 2, on a : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in [m,M]$.
La continuité de f sur le segment $[a,b]$ donne : $[m,M] = f([a,b])$. Cela fournit le résultat. □

Définition-Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ s'appelle *la valeur moyenne de f sur* $[a,b]$.

(a) L'application continue $|f|$ vérifie : $\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$.

(b) Il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)$ « formule de la moyenne ».

Démonstration

(a) On a $-|f| \leq f \leq |f|$, donc $-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, d'où l'inégalité.

(b) On pose $m = \inf\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$ et $M = \sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$. On a : $m \leq f \leq M$.

Donc, en intégrant de a à b : $(b-a)\,m \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)\,M$ par les points (i) et (ii) du 1.
D'où $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in [m,M]$. Or la continuité de f sur $[a,b]$ donne : $[m,M] = f([a,b])$.

Cela fournit le résultat. □

Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

On a : $\underbrace{\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{valeur moyenne de } f \text{ sur } [a,b]} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\,\tfrac{b-a}{n}\big)}_{\text{moyenne de } f(a+\frac{b-a}{n}),\ \dots,\ f(a+n\,\frac{b-a}{n})}$.

(∗) La *somme de Riemann de* f associée à $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ et $\xi_1 \in [x_0, x_1]$, ..., $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ est $\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(\xi_k)$. Par définition de l'intégrale, elle converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ quand $\max\limits_{1\leq k\leq n} (x_k - x_{k-1}) \to 0$.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On utilise les réels qui ont permis de définir $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

On a : $f\big(a+k\,\frac{b-a}{n}\big) = f(x_k)$ et $m_k \leq f(x_k) \leq M_k$ pour $0 \leq k \leq n$.

Ainsi : $\mathfrak{a}_n = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \leq \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\big(a+k\,\frac{b-a}{n}\big) \leq \mathcal{A}_n = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} M_k$.

Il reste à appliquer le théorème des gendarmes. □

Exemples

On peut – si on le souhaite – étudier $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\big(a+k\,\frac{b-a}{n}\big)$ en se ramenant au segment $[0,1]$ à l'aide de $\widetilde{f}(x) := f(a+(b-a)x)$ pour $x\in[0,1]$, car $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\big(a+k\,\frac{b-a}{n}\big) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{f}\big(\frac{k}{n}\big)$.

(1) Limite de la suite $u_n = \frac{1}{n}\big((1+\frac{1}{n})^2+(1+\frac{2}{n})^2+\cdots+(1+\frac{n}{n})^2\big)$, $n\geq 1$?

On constate que : $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big)$ où $f : \begin{array}{rcl}[0,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & (1+x)^2\end{array}$ est continue.

D'après la proposition on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 (1+x)^2\,\mathrm{d}x \overset{\text{cf. plus loin}}{=} \Big[\frac{(1+x)^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{7}{3}$.

[Autre méthode : la formule $1^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donne $u_n = \frac{1}{6}(2+\frac{1}{n})(7+\frac{1}{n})$ pour $n\geq 1$.]

La formule de la moyenne s'écrit ici : il existe $c\in[0,1]$ tel que $\int_0^1(1+x)^2\,\mathrm{d}x = (1+c)^2$.

(2) Limite de la suite $v_n = \frac{1}{n}\big(\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\big)$, $n\geq 1$?

On constate que : $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} g\big(\frac{k}{n}\big)$ où $g : \begin{array}{rcl}[0,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sin x\end{array}$ est continue.

La proposition donne ici : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x \overset{\text{cf. plus loin}}{=} [-\cos x]_0^1 = 1-\cos 1$.

[Autre méthode : la formule $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^1\cdots+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\theta}{2}}\frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$ donne $v_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{2n})\sin(\frac{1}{2})}{n\sin(\frac{1}{2n})}$ pour $n\geq 1$.]

D'après la formule de la moyenne, il existe $d\in[0,1]$ tel que $\int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x = \sin d$.

II. Calcul de primitives

Dans les cas simples, le calcul de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ va se ramener à trouver $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable tel que $F' = f$.

1. Techniques d'intégration

Définition

Une *primitive* d'une application $f : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

Théorème (« *théorème fondamental de l'intégration* »)

(a) Soient $f : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $a\in I$.

L'application $F_a : x\in I \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f.

b) Soient $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue et F une primitive de f.

On a : $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)}$.(*) ←[reste valable avec l'hypothèse « f Riemann-intégrable », cf. Ramis p. 222]

On notera $[F(x)]_a^b := F(b)-F(a)$.

(*) On aurait pu définir $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par cette égalité, après avoir démontré que f admet une primitive F et que $F(b)-F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive. Pour construire une primitive F de f, on pose $f_n(x_{k-1}+t(x_k-x_{k-1})) = f(x_{k-1})+t(f(x_k)-f(x_{k-1}))$ pour $1\leq k\leq n$ et $t\in[0,1]$. On construit explicitement la primitive F_n de f_n qui s'annule en a. Ensuite : f est « limite uniforme » de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ (th. de Heine) et le « th. convergence uniforme + dérivabilité » de L2 montre que $(F_n)_{n\geq 1}$ converge vers une primitive de f.

Démonstration

(a) Soit $x_0 \in I$. On se donne $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $x_0 + h \in I$.

Il existe $c \in [x_0, x_0+h]$ tel que $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$.

Ainsi : $\left|\frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\right| = |f(c) - f(x_0)|$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad x \in I \cap]x_0-\alpha, x_0+\alpha[.$$

Lorsque $|h| < \alpha$, on a $[x_0, x_0+h] \subseteq]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ donc $c \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, puis :

$$\left|\frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

D'où : $\frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \underset{\substack{h\to 0,\ x_0+h\in I \\ h\neq 0}}{\longrightarrow} f(x_0)$, ce qui s'écrit $F_a'(x_0) = f(x_0)$.

(b) D'après (a) : $F - F_a$ est dérivable et $(F - F_a)' = 0$.
Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $F - F_a = k$.
On en déduit : $F(b) - F(a) = (F_a(b)+k) - (F_a(a)+k) = F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Convention

Soient $f : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $a \in I$.

En reprenant la démonstration du théorème (b), on constate que les primitives de f sont les applications $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + k$ où $k \in \mathbb{R}$. Pour exprimer dans un calcul qu'une fonction F est une primitive de f, on écrira abusivement : $\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(x) + \text{cte},\ x \in I$.

même variable !

Par exemple : $\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \;=\; \ln t + \text{cte},\ t > 0$.

Corollaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f \geq 0$.

On a : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ (déjà vu) et $\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff f = 0\right)$.

Démonstration

D'après le théorème, f admet une primitive F. Comme $F' \geq 0$, l'application F croît.
Ainsi : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \geq 0$. En utilisant la croissance de f, on en déduit que :
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff F(b) = F(a) \iff F = \text{cte} \iff F' = 0 \iff f = 0$. □

Théorème (« *théorème de changement de variable* »)

Soient $f : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varphi : \underset{\text{intervalle infini}}{J} \longrightarrow I$ de classe C^1, et $u, v \in J$.

On a : $\boxed{\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$.

En pratique, on écrira d'abord : « CV $x = \varphi(t)$, donc $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ ».

Démonstration

Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Donc $F \circ \varphi$ est dérivable et $(F\circ\varphi)' = (f \circ \varphi)\,\varphi'$.
On applique aux fonctions continues f et $(f\circ\varphi)\,\varphi'$ le théorème fondamental de l'intégration :
$\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} = [(F\circ\varphi)(t)]_u^v = \int_u^v f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. □

Cas particuliers

(1) Soient $A > 0$ et $f : [-A, A] \to \mathbb{R}$ continue.
On a : $\int_{-A}^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-A}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$.
Le CV $x = -t$ donne $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, puis : $\int_{-A}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^0 f(-t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^A f(-t)\,\mathrm{d}t$.

D'où : $\boxed{\int_{-A}^A f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ si } f \text{ est impaire}}$ et $\boxed{\int_{-A}^A f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \text{ si } f \text{ est paire}}$.

(2) Soient $A \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
On a : $\int_A^{A+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{A+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Le CV $x = t + 2\pi$ donne $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, puis : $\int_{2\pi}^{A+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A f(t+2\pi)\,\mathrm{d}t$.

D'où : $\boxed{\int_A^{A+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ si } f \text{ est périodique de période } 2\pi}$.

Exemple

(a) Calcul de $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$?

CV $x = \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\sqrt{1-x^2} = |\cos t|$ et $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

On a : $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\sin(-\frac{\pi}{2})}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|\cos t|}_{\geq 0} \cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t$

puis : $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

(b) Calcul de $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $x \in [-1,1]$?

Idée : calculer $\int_0^{x_0} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ avec les CV $x_0 = \sin t_0$ et $x = \sin t$, où $t_0, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On se contente (en étant moins rigoureux) de reprendre le calcul précédent sans les bornes :

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + \mathrm{cte} = \frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{t}{2} + \mathrm{cte} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + \mathrm{cte}.$$

non dérivables en -1 et 1 (mais leur somme l'est)

Théorème (« *théorème d'intégration par parties* »)

Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

On a : $\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x}$.

DÉMONSTRATION

On applique à la fonctions continue $f := (uv)'$ le théorème fondamental de l'intégration : $\int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b$. Le résultat en découle. □

Exemple

Calcul de $\int \ln x\,\mathrm{d}x$, $x > 0$?

On pense à $\int_1^x \ln\ u\,\mathrm{d}u$ mais « oublie » les bornes qui resteraient fixées tout du long :

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(\ln x)}_{u(x)} \underbrace{1}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x = \underbrace{(\ln x)}_{u(x)} \underbrace{x}_{v(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} \underbrace{x}_{v(x)}\,\mathrm{d}x = (\ln x)\,x - x + \mathrm{cte}.$$

Corollaire (« *formule de Taylor avec reste intégral* »)

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que f est de classe C^{n+1}.
Alors on a :

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x}.$$

DÉMONSTRATION

Par des intégrations par parties successives, on obtient :

$$\int_a^b \underbrace{\frac{(b-x)^n}{n!}}_{u(x)} \underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$= \left[\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)\right]_a^b + \left[\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)\right]_a^b + \cdots + \left[\frac{(b-x)^1}{1!} f'(x)\right]_a^b + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-x)^0}{0!} f'(x)\,\mathrm{d}x}_{f(b)-f(a)}.$$

D'où le résultat. □

2. Primitives de fonctions rationnelles

Formulaire

Soit $a > 0$. La formule encadrée est utile et les autres sont à connaître pour $a = 1$:

(i) $\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cte}}$ sur $\mathbb{R}$;

[(i)' $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + \text{cte}$ sur $]-\infty, -a[$ (resp. $]-a, a[$, $]a, +\infty[$) ;] $\leftarrow$

$\begin{cases} \frac{1}{a}\,\text{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cte} & \text{si } |x| < a \\ \frac{1}{a}\,\text{artanh}\left(\frac{a}{x}\right) + \text{cte} & \text{si } |x| > a \end{cases}$

(ii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cte}$ sur $]-a, a[$;

(iii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + \text{cte}$ sur $\mathbb{R}$; $\longleftarrow$ $\text{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cte}'$

(iv) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + \text{cte}$ sur $]-\infty, -a[$ (resp. $]a, +\infty[$). $\leftarrow$

$\begin{cases} \text{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cte}' & \text{si } x > a \\ -\,\text{arcosh}\left(-\frac{x}{a}\right) + \text{cte}' & \text{si } x < -a \end{cases}$

Théorème (« *théorème de décomposition en éléments simples* »)

Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. On pose : $F := \frac{A}{B}$.

(a) Il existe $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, une partie finie $\underbrace{\{r_1, ..., r_m\}}_{\text{distincts}}$ de $\mathbb{R}$ munie de $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et une partie finie $\underbrace{\{(u_1, v_1), ..., (u_n, v_n)\}}_{\text{couples distincts}}$ de $\mathbb{R}^2$ munie de $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, uniques tels que :

$$B = \gamma(X - r_1)^{\alpha_1} ... (X - r_m)^{\alpha_m}(X^2 + u_1X + v_1)^{\beta_1} ... (X^2 + u_nX + v_n)^{\beta_n}$$

où les polynômes $X^2 + u_1X + v_1$ et ... et $X^2 + u_nX + v_n$ n'ont pas de racine réelle.

b) La fraction rationnelle F est somme de manière unique :

– d'un polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$ appelée *partie entière de F* ;

– « d'éléments simples de 1^re^ espèce » $\frac{\lambda}{(X-r_k)^i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i \leq \alpha_k$;

– « d'éléments simples de 2^e^ espèce » $\frac{\mu X+\nu}{(X^2+u_lX+v_l)^j}$ avec $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $1 \leq l \leq n$, $1 \leq j \leq \beta_l$.

$\left[\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{r_1, ..., r_m\} \quad F(x) = E(x) + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\lambda_{k,1}}{x-r_k} + ... + \frac{\lambda_{k,\alpha_k}}{(x-r_k)^{\alpha_k}}\right) + \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\mu_{l,1}x+\nu_{l,1}}{x^2+u_lx+v_l} + ... + \frac{\mu_{l,\beta_l}x+\nu_{l,\beta_l}}{(x^2+u_lx+v_l)^{\beta_l}}\right).\right]$

c) Le polynôme E du (b) est égal au quotient de la division euclidienne de A par B. Il est nul si $\deg(A) < \deg(B)$, et non-nul avec un degré égal à $\deg(A) - \deg(B)$ sinon.

Quand A n'est pas divisible par $X - r_k$ (resp. par $X^2 + u_lX + v_l$) l'élément simple de la forme $\frac{\lambda}{(X-r_k)^{\alpha_k}}$ (resp. $\frac{\mu X+\nu}{(X^2+u_lX+v_l)^{\beta_l}}$) vérifie $\lambda \neq 0$ (resp. $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$).

Exemple 1

On considère : $F = \dfrac{1}{X^3+1}$.

On a : $\underbrace{X^3+1}_{\text{s'annule en } -1} = (X+1)(\underbrace{X^2+\ ?\ }_{X^2-X+1})$ avec X^2-X+1 sans racine réelle (vu le discriminant).

Il existe donc $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ uniques tels que :

$$\underbrace{\frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)}}_{F} = \underbrace{0}_{E} + \frac{\lambda}{X+1} + \frac{\mu X+\nu}{X^2-X+1}.$$

On pourrait réduire le membre de droite au même dénominateur, puis identifier les coefficients des numérateurs. On peut aussi remplacer X par x puis utiliser les astuces suivantes :

– on multiplie par $x+1$ et passe à $x \to -1$ avec $x \neq -1$: $\lambda = \frac{1}{3}$;

– on prend $x = 0$: $1 = \lambda + \nu$, donc $\nu = \frac{2}{3}$;

– on multiplie par x et passe à $x \to +\infty$: $0 = \lambda + \mu$, donc $\mu = -\frac{1}{3}$.

(Au lieu d'utiliser les valeurs 0 et $+\infty$, on aurait aussi pu prendre une valeur complexe non-réelle, par exemple $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ après avoir multiplié par $x^2 - x + 1$, et admettre que deux fonctions rationnelles complexes sont égales dès qu'elles sont égales aux points réels où elles sont définies.)

En conclusion : $F = \frac{\frac{1}{3}}{X+1} + \frac{-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}}{X^2-X+1}$.

Algorithmes (admis)

On reprend les notations du théorème. On va calculer des « DL » de $F(x)$ en $+\infty$ et en r_k.

a) On suppose que $\deg(A) \geq \deg(B)$ (sinon $E = 0$) et note :

$A = a_pX^p + \cdots + a_1X + a_0$ et $B = b_qX^q + \cdots + b_1X + b_0$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

La partie entière E de F s'obtient comme suit, par division euclidienne de A par B :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0 & b_qX^q + b_{q-1}X^{q-1} \cdots + b_0 \\
\cline{3-3}
- & a_pX^p + \frac{a_pb_{q-1}}{b_q}X^{p-1} + \cdots & \underbrace{\frac{a_p}{b_q}X^{p-q} + \frac{a'_{p-1}}{b_q}X^{p-q-1} + \cdots}_{\text{quotient égal à } E} \\
\cline{2-2}
= & a'_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a'_0 & \\
- & \cdots \quad \cdots & \\
\cline{2-2}
= & \cdots & \\
 & // \quad // \quad // & \\
\cline{2-2}
 & a''_{q-1}X^{q-1} + \cdots + a''_0 &
\end{array}
$$

Astuce : on utilise dans ce calcul autant de coefficients de A et de B, à partir de a_p et b_q, qu'on en attend dans E.

b) Soit $k \in \{1, ..., m\}$. On pose $X = r_k + Y$ et écrit A et B suivant les Y^i croissants ($i \geq 0$) :
$A = \tilde{a}_uY^u + \tilde{a}_{u+1}Y^{u+1} + \cdots + \tilde{a}_pY^p$ et $B = \tilde{b}_vY^v + \tilde{b}_{v+1}Y^{v+1} + \cdots + \tilde{b}_qY^q$ où $\tilde{a}_u \neq 0$ et $\tilde{b}_v \neq 0$.

La fraction rationnelle F_k somme des éléments simples de 1re espèce associés à r_k s'obtient, avec une méthode incontournable quand $\alpha_k \geq 4$, par division suivant les puissances croissantes de A par $\frac{B}{Y^v}$, jusqu'à faire apparaître α_k coefficients dans le quotient quand Y ne divise pas A :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \tilde{a}_uY^u + \tilde{a}_{u+1}Y^{u+1} + \cdots + \tilde{a}_pY^p & \tilde{b}_v + \tilde{b}_{v+1}Y + \cdots + \tilde{b}_qY^{q-v} \\
\cline{3-3}
- & \tilde{a}_uY^u + \frac{\tilde{a}_u\tilde{b}_{v+1}}{\tilde{b}_v}Y^{u+1} + \cdots & \underbrace{\frac{\tilde{a}_u}{\tilde{b}_v}Y^u + \frac{\tilde{a}'_{u+1}}{\tilde{b}_v}Y^{u+1} + \cdots} \\
\cline{2-2}
= & \tilde{a}'_{u+1}Y^{u+1} + \cdots \cdots + \tilde{a}'_{p'}Y^{p'} & \text{quotient } Q \text{ tel que } F_k(X) = \frac{Q}{Y^v} \\
- & \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \text{(calcul jusqu'au coefficient de } Y^{v-1}\text{)} \\
\cline{2-2}
= & \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
 & // \quad // \quad // \quad // \quad // & \\
\cline{2-2}
 & \tilde{a}''_vY^v + \cdots + \tilde{a}''_{p''}Y^{p''} &
\end{array}
$$

Astuce : on utilise dans ce calcul autant de coefficients de A et de B, à partir de $\tilde{a}_u$ et $\tilde{b}_v$, qu'on en attend dans F_k.

Exemple 2

On considère : $F = \dfrac{X^5 + X^4 + X^2 + 1}{X^3 - X^2 - X + 1}$.

On a : $\underbrace{X^3 - X^2 - X + 1}_{\text{s'annule en } 1} = (X-1)(X^2 + 0X - 1) = (X+1)(X-1)^2$.

On note ici $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$. Il existe $E \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 et $a, b, c \in \mathbb{R}$ uniques tels que :

$$\underbrace{\frac{X^5 + X^4 + X^2 + 1}{(X+1)(X-1)^2}}_{F} = E + \underbrace{\frac{a}{X+1}}_{F_1,\text{ cf. (b)}} + \underbrace{\frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1}}_{F_2,\text{ cf. (b)}}.$$

On commence par calculer les 3 coefficients de E :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & X^5 + \ X^4 \ +0X^3 \ + \cdots & X^3 - X^2 - X + \cdots \\
\cline{3-3}
- & X^5 - \ X^4 \ - X^3 \ + \cdots & X^2 + 2X + 3 \\
\cline{2-2}
= & 2X^4 + X^3 \ + \cdots & \\
- & 2X^4 -2X^3 \ + \cdots & \\
\cline{2-2}
= & 3X^3 \ + \cdots & \\
 & // \ // \ // &
\end{array}
\qquad \text{donc } \ E = X^2 + 2X + 3.
$$

On remplace X par x, multiplie par $x+1$ et passe à $x \to -1$ avec $x \neq -1$: $a = \frac{1}{2}$.

Méthode 1

On continue en généralisant cette technique et choisissant une autre valeur particulière :
– on multiplie par $(x-1)^2$ et passe à $x \to 1$ avec $x \neq 1$: $b = 2$;
– on prend $x = 0$: $1 = 3 + a + b - c$, donc $c = \frac{9}{2}$.

Méthode 2

On utilise l'algorithme (b) pour calculer b et c. On pose $X = 1+Y$ et cherche 2 coefficients :
$F = \dfrac{(1+Y)^5 + (1+Y)^4 + (1+Y)^2 + 1}{((1+Y)+1)Y^2} = \dfrac{4 + 11\,Y + \cdots}{Y^2\,(2+Y)}$.
Division suivant les puissances de Y croissantes jusqu'à obtenir 2 coefficients :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 4 + 11\,Y + \cdots & 2 + Y \\
\cline{3-3}
- & 4 + \ 2Y & 2 + \frac{9}{2}\,Y \\
\cline{2-2}
= & 9Y \ + \cdots & \\
 & // \ // &
\end{array}
\qquad \text{donc } \ F_2(X) = \tfrac{2}{Y^2} + \tfrac{\frac{9}{2}}{Y} \ \text{ puis } \ b = 2 \ \text{ et } \ c = \tfrac{9}{2}.
$$

Finalement : $F \ = \ X^2 + 2X + 3 \ + \ \frac{\frac{1}{2}}{X+1} \ + \ \frac{2}{(X-1)^2} \ + \ \frac{\frac{9}{2}}{X-1}$.

Pour intégrer une fonction rationnelle, on est ramené à intégrer ses éléments simples.

Lemme (immédiat)

On reprend les notations du théorème de décomposition en éléments simples.

On peut construire $\alpha \in \mathbb{R}$, puis $\beta \in \mathbb{R}$, enfin $\gamma > 0$, tels que :

$$\frac{\mu x + \nu}{(x^2 + u_l x + v_l)^j} = \alpha\,\frac{2x + u_l}{(x^2 + u_l x + v_l)^j} + \beta\,\frac{1}{((x + \frac{u_l}{2})^2 + \gamma^2)^j} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Les primitives $\int \frac{2x+u_l}{(x^2+u_l x+v_l)^j}\,\mathrm{d}x$ se calculent à l'aide du CV : $t = x^2 + u_l x + v_l$.

(b) Le calcul des primitives $\int \frac{\mathrm{d}x}{((x+\frac{u_l}{2})^2+\gamma^2)^j}$ se ramène à celui de $\int \frac{\mathrm{d}x}{((x+\frac{u_l}{2})^2+\gamma^2)^{j-1}}$ en intégrant par parties à partir de $\int \underbrace{1}_{\text{dérivée de } x \mapsto x + \frac{u_l}{2}} \times \frac{1}{((x+\frac{u_l}{2})^2+\gamma^2)^{j-1}}\,\mathrm{d}x$.

Exemples

(1) Calcul de $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$?

On a vu que : $\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

De plus : $\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$.

D'où : $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} \ = \ \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})\right) + \text{cte}.$

(2) Calcul de $\int \frac{x^5+x^4+x^2+1}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

On a vu que : $\frac{x^5+x^4+x^2+1}{x^3-x^2-x+1} = x^2 + 2x + 3 + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{\frac{9}{2}}{x-1}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

D'où : $\int \frac{x^5+x^4+x^2+1}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \ = \ \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{2}{x-1} + \frac{9}{2}\ln|x-1| + \text{cte}.$

3. Changements de variables classiques

Certains calculs d'intégrales se ramènent à l'intégration d'une fonction rationnelle.
On se placera à chaque fois sur un intervalle adéquat.

Primitives d'une fonction rationnelle $F(\cos x, \sin x)$ en $\cos x$ et $\sin x$

(a) Calcul de $\int F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ $\big($resp. : $\int F(\cosh x, \sinh x)\,\mathrm{d}x\big)$ avec F rationnelle réelle (*) :

CV $\boxed{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$ (resp. $t = \mathrm{e}^x$) en utilisant $\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$ et $\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$.

[Il faut écarter les réels $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en réduisant l'intervalle sur lequel on recherche une primitive.]

(b) « Règles de Bioche » :

– CV $t = \sin x$ (resp. $t = \sinh x$) si $F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par $x \mapsto \pi - x$;
– CV $t = \cos x$ (resp. $t = \cosh x$) si ' ' ' ' $x \mapsto -x$;
– CV $t = \tan x$ (resp. $t = \tanh x$) si ' ' ' ' $x \mapsto \pi + x$.

$\big[$CV $t = \cos(2x)$ (resp. $t = \cosh(2x)$) si $F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par deux de ces transformations.$\big]$

Démonstration

(a) On utilise, après réduction éventuelle de l'intervalle : $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ (resp. $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$).

(b) On note $c = \cos x$ et $s = \sin x$. Attention : $F(c,s)$ ne détermine pas F (cf. X^2+Y^2-1).

On suppose que $F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par $x \mapsto \pi - x$. Donc $F(-c,s) = -F(c,s)$.
On pose $\frac{F(c,s)}{c} = \frac{A_1(c,s)}{B_1(c,s)}$ avec A_1 et B_1 polynomiaux. Donc $\frac{F(c,s)}{c} = \frac{A_1(c,s)\,B_1(-c,s))}{B_1(c,s)\,B_1(-c,s)}$.
Comme $\frac{F(c,s)}{c}$ est pair en c, $A_2(c,s) := A_1(c,s)\,B_1(-c,s)$ et $B_2(c,s) := B_1(c,s)\,B_1(-c,s)$ sont pairs en c, puis $\frac{F(c,s)}{c} = \frac{A_2(c,s)+A_2(-c,s)}{B_2(c,s)+B_2(-c,s)} = G(c^2,s)$ avec G rationnelle. D'où :

$$F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = G(1-\sin^2 x, \sin x)\,\mathrm{d}(\sin x).$$

On suppose que $F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par $x \mapsto -x$. Donc $F(c,-s) = -F(c,s)$.
Comme $\frac{F(c,s)}{s}$ est pair en s, on a cette fois-ci $\frac{F(c,s)}{s} = H(c, s^2)$ avec H rationnelle. D'où :

$$F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = -H(\cos x, 1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}(\cos x).$$

On suppose que $F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par $x \mapsto \pi + x$. Donc $F(-c,-s) = F(c,s)$.
On pose $F(c,s) = \frac{A(c,s)}{B(c,s)}$ avec A et B polynomiaux. Donc $F(c,s) = \frac{A(c,s)\,B(-c,-s)}{B(c,s)\,B(-c,-s)}$.
Comme $F(c,s)$ est pair en (c,s), $U(c,s) := A(c,s)\,B(-c,s)$ et $V(c,s) := B(c,s)\,B(-c,s)$ sont pairs en (c,s), puis $F(c,s) = \frac{U(c,s)+U(-c,-s)}{V(c,s)+V(-c,-s)} = \frac{U_1(c^2,s^2)+cs\,U_2(c^2,s^2)}{V_1(c^2,s^2)+cs\,V_2(c^2,s^2)}$ avec U_1, U_2, V_1, V_2 polynomiaux. D'où :

$$F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{U_1\Big(\frac{1}{1+\tan^2 x}, \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\Big) + \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\,U_2\Big(\frac{1}{1+\tan^2 x}, \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\Big)}{V_1\Big(\frac{1}{1+\tan^2 x}, \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\Big) + \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\,V_2\Big(\frac{1}{1+\tan^2 x}, \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\Big)}\,\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1+\tan^2 x}.$$

La validité des changements de variable hyperboliques découle des mêmes arguments. □

Exemple

Calcul de $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$? $\longleftarrow$ [Ici $F(u,v) = \frac{1}{v}$]

Méthode 1

CV $t = \tan(\frac{x}{2})$, $x \in I$ donc $\sin x = \frac{2\,t}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(1+\tan^2(\frac{x}{2})\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1+t^2}{2}\,\mathrm{d}x$.

D'où : $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \displaystyle\int \frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{\frac{2\,t}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + \mathrm{cte} = \ln\big|\tan(\tfrac{x}{2})\big| + \mathrm{cte}$.

Méthode 2

On constate que $\frac{\mathrm{d}(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\mathrm{d}x}{-\sin x} = \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$: CV $t = \cos x$, $x \in I$ donc $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$.

On fait apparaître $\mathrm{d}t$ afin d'appliquer le théorème de changement de variable :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{-\sin x\,\mathrm{d}x}{-\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \cdots = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \mathrm{cte} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + \mathrm{cte}.$$

(*) Cela signifie que $F(u,v) = \frac{A(u,v)}{B(u,v)}$ où $A(u,v) = \sum_{1\le i,j\le m} a_{i,j}\,u^i v^j$ et $B(u,v) = \sum_{1\le i,j\le n} b_{i,j}\,u^i v^j$ $(a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R})$.

Intégrales abéliennes

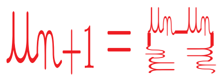
(a) Calcul de $\int F(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}})\,\mathrm{d}x$ avec F rationnelle réelle, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ non-constante : CV $y = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$.

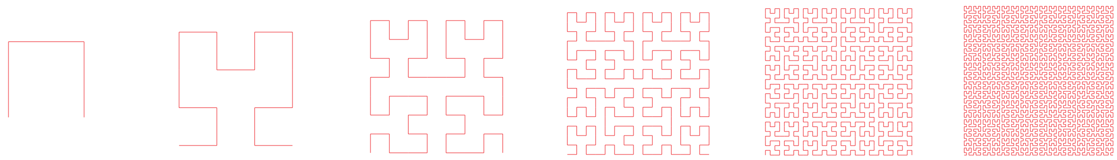
(b) Calcul de $\int F(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ avec F rationnelle réelle et $a \neq 0$: faire apparaître $\sqrt{-y^2+1}$ ou $\sqrt{y^2-1}$ ou $\sqrt{y^2+1}$ $(y=\alpha x+\beta)$, puis utiliser respectivement l'un des changements de variable $y=\sin\theta$ $(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$ ou $y=\varepsilon\cosh t$ $(t\geq 0)$ avec $\underbrace{\varepsilon\in\{-1,1\}}_{\text{suivant l'intervalle décrit par } y}$ ou $y=\sinh t$.

[On peut aussi poser, avec des calculs mécaniques :
$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t\,|x-x_2|$ si aX^2+bX+c a des racines réelles x_1 et x_2 (par exemple $a<0$), ce qui correspond au cas du (a) avec $n=2$;
$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t$ si $a>0$.]

Ch. 3. Études locales

<u>Plan</u>
I. Formule de Taylor-Lagrange (globale)
II. Développements limités
III. Tangentes et asymptotes

On considère la limite γ de la suite récurrente  de premiers termes :



Cette courbe paramétrée γ est continue, appelé *courbe de Hilbert*, et son image est un carré !

L'objet de ce chapitre est d'étudier les courbes paramétrées avec un comportement régulier.

I. Formule de Taylor-Lagrange (globale)

On rappelle que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les ensembles de l'une des formes $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$, $[a,b]$, $]a,+\infty[$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,+\infty[$, où $a,b\in\mathbb{R}$ et $a\le b$.

1. Accroissements finis

On généralise le théorème de Rolle.

Théorème (« *théorème des accroissements finis* »)
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ distincts.
On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que : $f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(c)$.

Démonstration

On fixe $k\in\mathbb{R}$ et pose : $\psi(x):=f(x)+kx$ pour $x\in[a,b]$. Donc ψ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ de dérivée $x\mapsto f'(x)+k$. Afin que $\psi(a)=\psi(b)$, on choisit : $k=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

On applique le théorème de Rolle à ψ : il existe $c\in\,]a,b[$ tel que : $\psi'(c)=0$.
Cela se traduit par l'égalité $f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(c)$. □

Remarque (importante)
Le théorème des accroissements finis ne se généralise pas à la situation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, comme le montre l'exemple de $f:\begin{array}{ccc}[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \cos x+\mathrm{i}\sin x\end{array}$.

Démonstration

Ici on a $f(0)=f(2\pi)=1$, mais f' ne s'annule pas car $|f'(x)|=1$ pour tout $x\in[0,2\pi]$.
Il n'existe donc aucun $c\in\,]a,b[$ tel que : $f(2\pi)-f(0)=2\pi\,f'(c)$. □

Proposition (« *règle de (De) l'Hôpital* »)

1. On se donne $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Soient $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.
On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.
Alors $g(a) \neq g(b)$ et il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
« *théorème des accroissements finis généralisé* ».
(Cela signifie que la courbe $\gamma := (f,g)$ admet au point c une tangente parallèle à $[\gamma(a), \gamma(b)]$.)

2. Soient $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $a < b$.

On suppose que
(i) $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ (\text{resp. } x\to b^-)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ (\text{resp. } x\to b^-)}} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ (\text{resp. } x\to b^-)}} |f(x)| = \lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ (\text{resp. } x\to b^-)}} |g(x)| = +\infty$;
(ii) f et g sont dérivables, et g' ne s'annule pas ;
(iii) $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{\substack{x\to a^+ \\ (\text{resp. } x\to b^-)}}{\longrightarrow} l$ pour un certain $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Alors : $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x\to a^+ \\ (\text{resp. } x\to b^-)}}{\longrightarrow} l$ où $g(x) \neq 0$ pour « x assez proche de a (resp. de b) ».

Démonstration

1. On trouve par l'absurde que $g(a) \neq g(b)$, en utilisant le théorème de Rolle.
On obtient l'existence de c en appliquant le théorème de Rolle à l'application $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$ pour $x \in [a,b]$.

2. Quitte à remplacer f et g par $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ et $x \mapsto g(\frac{1}{x})$, on peut supposer que $a \neq -\infty$.

• Forme indéterminée $\frac{0}{0}$: on pose $f(a) = g(a) = 0$. Pour simplifier on suppose que $l \in \mathbb{R}$ (méthode analogue dans les cas $l = -\infty$ ou $l = +\infty$).

On se donne $x \in]a,b[$. On a : $g(x) \neq 0$ (th. de Rolle entre a et x).
D'après le th. des accroissements finis généralisé, il existe $c \in]a,x[$ tel que : $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - l\right| < \varepsilon$ dès que $0 < t - a < \alpha$.
Si $0 < x - a < \alpha$, on a : $0 < c - a < \alpha$ donc $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon$.

En conclusion : $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$. (Variante : choix de $c := c_x$ et composition de limites.)

• Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$: on va utiliser l'égalité $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right)\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} + \frac{f(x_0)}{g(x)}$.
Pour simplifier on suppose que $l \in \mathbb{R}$ (méthode analogue dans les cas $l = -\infty$ ou $l = +\infty$).

Soit $\varepsilon > 0$. On se donne $x \in]a,b[$.

Tout d'abord, il existe $\alpha > 0$ tel que $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - l\right| < \varepsilon$ dès que $0 < t - a < \alpha$.

On fixe x_0 tel que $0 < x_0 - a < \alpha$. D'après le th. des accroissements finis généralisé, on a $g(x) \neq g(x_0)$ et il existe $c \in]x, x_0[$ tel que : $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
Il existe aussi $\beta > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ et $\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{|l|+\varepsilon}$ et $\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| < \varepsilon$ dès que $0 < x - a < \beta$.
Si $0 < x - a < \alpha$ et $0 < x - a < \beta$, on a : $0 < c - a < \alpha$ et $\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{|l|+\varepsilon}$ et $\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| < \varepsilon$
puis $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - l\right| + \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right| \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right| + \left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| < 3\varepsilon$.

En conclusion : $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$. □

Exemple

On définit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par : $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$.

L'application $f|_{]0,+\infty[}$ est dérivable et l'intervalle $]0,+\infty[$ est ouvert.
L'application f est donc dérivable en chaque point de $]0,+\infty[$.

On constate que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ avec $f(0)=1$. Donc f est continue en 0.
De plus : $f'(x) = (\ln x + 1)\,\mathrm{e}^{x\ln x}$ pour $x>0$, puis $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

La règle de l'Hôpital appliquée à $f_{|[0,1[}$ donne $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.
Ansi f n'est pas dérivable en 0 et son graphe a une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Corollaire 0 (« théorème de Darboux »)

La dérivée d'une application dérivable $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ distincts vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

Démonstration

On note $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x\neq a \\ \text{ou} \\ f'(a) & \text{si } x=a \end{cases}$ et $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x\neq b \\ \text{ou} \\ f'(b) & \text{si } x=b \end{cases}$ pour $x\in[a,b]$.

Comme les intervalles $g([a,b])$ et $h([a,b])$ contiennent tous deux le point $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, l'ensemble $g([a,b])\cup h([a,b])$ est un intervalle. De plus $g([a,b])$ et $h([a,b])$ sont inclus dans $f'([a,b])$, d'après le théorème des accroissements finis.

D'où : $[f'(a), f'(b)] \subseteq g([a,b]) \cup h([a,b]) \subseteq f'([a,b])$. □

Remarque

L'application $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x\neq 0$ et $g(0)=1$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur tout segment $[a,b]$ avec $a<b$ sans être une dérivée.

Démonstration

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$.

Si $b<0$ ou $a>0$: l'ensemble $g([a,b])$ est un intervalle en tant qu'image de $[a,b]$ par l'une des applications continues $g_{|]-\infty,0[}$ ou $g_{|]0,+\infty[}$. Si $a\leq 0\leq b$: l'ensemble $g([a,b])$ contient $[-1,1]$ qui est l'image de g, donc il est égal à l'intervalle $[-1,1]$.

On suppose, par l'absurde, qu'il existe $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f'=g$.

On pose : $h(x) = f(x) - f(-x)$ pour $x\in\mathbb{R}$. Donc : $h'(x) = g(x) + g(-x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

L'application h', telle que $h'(x) = 0$ si $x\neq 0$ et $h'(0)=2$, ne vérifie pas le théorème des valeurs intermédiaires. Cela contredit le corollaire. □

Corollaire 1

Soient $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

(a) L'application f est constante si et seulement si $f'=0$.

(b) L'application f est croissante (resp. : décroissante) si et seulement si
$$f'(x)\geq 0 \ \ (\text{resp. : } f'(x)\leq 0) \text{ pour tout } x\in I.$$

(c) Si $f'(x)>0$ (resp. : $f'(x)<0$) pour tout $x\in I$, alors l'application f est strictement croissante (resp. : strictement décroissante).

Démonstration

Comme « f constante » signifie « f croissante et f décroissante », le (a) découlera du (b).

• On suppose que f est croissante. Si $x_0\in I$, le réel $f'(x_0)$ qui est limite quand $x\to x_0$ avec $x\in I$ et $x\neq x_0$ de la fonction positive $x\neq x_0 \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, est positif. Donc $f'\geq 0$.
On suppose que f est décroissante. On a par un argument analogue : $f'\leq 0$.

• Il reste à étudier la monotonie de f sous une des 4 conditions de signe considérées pour f'.

Soient $a,b\in I$ avec $b>a$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)\,f'(c)$. Comme $b-a>0$, on en déduit que : si $f'(x)\geq 0$ (resp. : ≤ 0, >0, <0) pour tout $x\in I$, alors $f(b)-f(a)\geq 0$ (resp. : ≤ 0, >0, <0).
Cela donne le résultat. □

Corollaire 2 (« *inégalité des accroissements finis* »)

Soient $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $k \geq 0$.

On suppose que : $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$.

Alors : $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$ pour tous $x, y \in I$.

Démonstration

Soient $x, y \in I$. L'inégalité est claire quand $x = y$.

Sinon, on applique le théorème des accroissements finis à $f_{|[x,y]}$: il existe $c \in\,]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y-x)\,f'(c)$. D'où : $|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x-y| \;\leq\; k\,|x-y|$. □

Remarque (hors programme)

Soient $f\colon \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, et $l \in I$ tel que $f(l) = l$.

On suppose qu'il existe $0 \leq k < 1$ tel que : $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$.

On suppose en outre donné $a \in I$ tel que : $f(a) \in I$, $f(f(a)) \in I$, $f(f(f(a))) \in I$, ...
Autrement dit il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans I vérifiant $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

D'après le corollaire on a « de proche en proche » (récurrence cachée) :
$|u_n - l| = |f(u_{n-1}) - f(l)| \;\leq\; k\,|u_{n-1} - l| \;\leq\; \cdots \;\leq\; k^n\,|u_0 - l|$ pour tout $n \geq 0$.
Comme le majorant $k^n\,|u_0 - l|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, on en déduit que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

2. La formule

On généralise ici le théorème des accroissements finis.

Théorème (« *formule de Taylor-Lagrange* ») ⟵ [Taylor (ni reste, ni dem.) : 1715 ; Lagrange (dem.) : 1797]

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, et $n \in \mathbb{N}$ (« *ordre de la formule* »).

On suppose que f est $\underbrace{\text{de classe } \mathrm{C}^n}_{\text{c'est à dire } n\text{-fois dérivable et de dérivée n}^{\text{e}} \text{ continue}}$ sur $[a,b]$ et que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$.

Alors il existe $c \in\,]a,b[$ tel que :

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}\,f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c)}\,.$$

Démonstration

On note A l'unique réel tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}\,f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\neq 0} \times A.$$

On pose, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\varphi(x) := f(b) - f(x) - \tfrac{b-x}{1!}\,f'(x) - \cdots - \tfrac{(b-x)^n}{n!}\,f^{(n)}(x) - \tfrac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \times A\,.$$

On a : $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus, pour $x \in\,]a,b[$:

$$\varphi'(x) \;=\; \cancel{-f'(x)} + \Big(\cancel{f'(x)} - \cancel{\tfrac{b-x}{1!}f''(x)}\Big) + \Big(\cancel{\tfrac{b-x}{1!}f''(x)} - \cancel{\tfrac{(b-x)^2}{2!}f^{(3)}(x)}\Big) + \cdots$$
$$+ \Big(\cancel{\tfrac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)} - \tfrac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\Big) + \tfrac{(b-x)^n}{n!} \times A.$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in\,]a,b[$ tel que : $\varphi'(c) = 0$.
Cela se traduit par : $A = f^{(n+1)}(c)$. D'où le résultat. □

Exemple

Soit $x > 0$. On considère l'application $f\colon \begin{array}{rcl} [0,x] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin t \end{array}$. Elle est $\underbrace{\text{de classe } \mathrm{C}^\infty}_{\text{c'est à dire } n\text{-fois dérivable pour tout } n \geq 1}$.

On applique la formule de Taylor-Lagrange à f ($a=0$ et $b=x$), à l'ordre 2 et à l'ordre 4.
Il existe $c,d\in\,]0,x[$ tels que $\sin(x)=\sin(0)+\frac{x}{1!}\sin'(0)+\frac{x^2}{2!}\sin''(0)+\frac{x^3}{3!}\sin^{(3)}(c)$
et $\sin(x)=\sin(0)+\frac{x}{1!}\sin'(0)+\frac{x^2}{2!}\sin''(0)+\frac{x^3}{3!}\sin^{(3)}(0)+\frac{x^4}{4!}\sin^{(4)}(0)+\frac{x^5}{5!}\sin^{(5)}(d)$
ce qui devient, après simplification : $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}\cos c$ et $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cos d$.

Comme $\cos c\le 1$ et $\cos d\le 1$, on en déduit que :

$$x-\frac{x^3}{3!}\le \sin x\le x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\,.$$

Remarque

On s'intéresse ici à la formule de Taylor-Lagrange avec $a=0$ et $b=x$, donc $c\in\,]0,x[$.
Voici des cas particuliers dans lesquels les 3 premiers termes (monômes en x) sont à connaître :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1+x+\tfrac{x^2}{2!}+\cdots+\tfrac{x^n}{n!}+\tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^c\,;\\
\cos x &= 1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\tfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos c\,;\\
\sin x &= x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\tfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos c\,;\\
\tfrac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\tfrac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}\quad \text{avec } x<1\ \left(\text{d'ailleurs } \tfrac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}=\tfrac{x^{n+1}}{1-x}\right);\\
\ln(1+x) &= x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n}+(-1)^n\tfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\quad \text{avec } x>-1.
\end{aligned}$$

Corollaire (« *inégalité de Taylor-Lagrange* » $^{(*)}$)

Soient $f:\underset{\text{intervalle infini}}{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ $n{+}1$-fois dérivable avec $n\in\mathbb{N}$, et $k\ge 0$.

On suppose que : $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le k$ pour tout $x\in I$.

Alors :

$$\left|f(b)-\left(f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right)\right|\le k\,\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\quad\text{pour tous } a,b\in I.$$

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de la formule de Taylor-Lagrange. □

Exemples

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. On considère l'application $\sin:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ t&\mapsto&\sin t\end{array}$ qui est de classe C^∞.

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 8 avec $k=1$, $a=0$ et $b=x$, s'écrit ici :

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5\,040}\right)\right|\le\frac{|x|^9}{362\,880}\,.$$

Cela permet d'obtenir une « valeur approchée » de $\sin x$, en particulier quand $|x|\le 1$.

2. Comment trouver une valeur approchée rationnelle de $\ln(\frac{3}{2})$ à 0,01 près ?
On va approcher $\ln(\frac{3}{2})$ à l'aide des dérivées successives de ln en 1. On se ramène d'abord en 0.

L'application $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\ln(1+x)\end{array}$ est de classe C^∞.

Par récurrence sur $n\ge 1$, on constate que : $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ pour $x\ge 0$.

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n à f avec $k=n!$, $a=0$ et $b=\frac{1}{2}$:

$$\left|\ln(\tfrac{3}{2})-\left(\frac{(\frac{1}{2})}{1}+(-1)\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}+\frac{(\frac{1}{2})^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n}\right)\right|\le\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}.$$

Lorsque $n=4$, on a $\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{160}\le 0{,}01$ donc $\left|\ln(\frac{3}{2})-\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{24}-\tfrac{1}{64}\right)}_{\frac{77}{192}}\right|\le 0{,}01.$

II. Développements limités

$(*)$ On peut démontrer que ce résultat reste valable quand on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

1. Généralités

Question : peut-on considérer que $\frac{1}{x}$ est « négligeable » devant $\sin x$ quand $x \to +\infty$?
Idée : existe-t-il une « sorte de quotient » de $\frac{1}{x}$ par $\sin x$ qui tende vers 0 quand $x \to +\infty$?

Définition (en marge du programme)

Soient $f, g : \underset{\text{partie de } \mathbb{R}}{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(a) On suppose que $u \in \mathbb{R}$ et qu'il existe un intervalle ouvert J (non-fixé) vérifiant l'hypothèse (H) suivante : u appartient à J et $J \subseteq D$.

On écrit $f(x) \underset{x \to u}{=} o(g(x))$ pour traduire l'existence d'une application $\varepsilon : \underbrace{J}_{\text{un intervalle ouvert vérifiant } (H)} \to \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)$ quand $x \in J$, et $\varepsilon(x) \underset{x \to u}{\longrightarrow} 0$.

On lira « $f(x) \underset{x \to u}{=} o(g(x))$ » en disant que $f(x)$ *est négligeable devant* $g(x)$ *quand* $x \to u$.

(b) On se place à nouveau sous la condition du (a).

On écrit $f(x) \underset{x \to u}{\sim} g(x)$ pour traduire l'existence d'une application $\lambda : \underbrace{J}_{\text{un intervalle ouvert vérifiant } (H)} \to \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \lambda(x)\, g(x)$ quand $x \in J$, et $\lambda(x) \underset{x \to u}{\longrightarrow} 1$.

On lira « $f(x) \underset{x \to u}{\sim} g(x)$ » en disant que $f(x)$ *est équivalent à* $g(x)$ *quand* $x \to u$.

(c) On généralise les définitions du (a) et du (b) en remplaçant

– « $x \to u$ » par l'une des tendances : $x \underset{x \neq u}{\longrightarrow} u$, $x \to u^+$, $x \to u^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$;

– l'hypothèse (H) respectivement par : $u \in \mathbb{R}$ appartient à J et $J \setminus \{u\} \subseteq D$, $u \in \mathbb{R}$ est borne inférieure de J et $J \subseteq D$, $u \in \mathbb{R}$ est borne supérieure de J et $J \subseteq D$, $u = +\infty$ est borne supérieure de J et $J \subseteq D$, $u = -\infty$ est borne inférieure de J et $J \subseteq D$; $\longleftarrow \begin{bmatrix} \inf \emptyset = +\infty \\ \text{et} \\ \sup \emptyset = -\infty \end{bmatrix}$

– l'ensemble de définition J de ε et λ par $J \cap D$, où variera x, dans le cas de $x \underset{x \neq u}{\longrightarrow} u$. (*)

Remarques

La condition d'existence de J imposée au (a) et au (b) est toujours réalisée lorsque D est un intervalle ouvert I et $u \in I$ (choisir $J := I$).

Si g ne s'annule pas, on peut exprimer $\varepsilon(x)$ ou $\lambda(x)$ à l'aide de $f(x)$ et $g(x)$. Dans ce cas :

(i) $f(x) \underset{x \to u}{=} o(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to u}{\longrightarrow} 0$;

(ii) $f(x) \underset{x \to u}{\sim} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to u}{\longrightarrow} 1$.

De même en remplaçant $x \to u$ par : $x \underset{x \neq u}{\longrightarrow} u$, $x \to u^+$, $x \to u^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Proposition (en marge du programme)

Soient $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 : \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

(a) On a :

(i) $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{=} o(h(x)) \implies f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(h(x))$;

(ii) $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x)) \implies h(x)\, f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(h(x)\, g(x))$;

(iii) $f_1(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g_2(x)) \implies f_1(x) f_2(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g_1(x) g_2(x))$;

(iv) $f_1(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$ et $f_2(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x)) \implies f_1(x) + f_2(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$.

(Pas d'analogue du (iii) pour la somme : $x \underset{x \to 0}{=} o(1 + x^2)$ et $x \underset{x \to 0}{=} o(-1)$ mais $2x \underset{x \to 0}{\neq} o(x^2)$.)

(b) On a :

(i) $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \implies g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)$;

(ii) $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x) \implies f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x)$;

(iii) $f_1(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g_2(x) \implies f_1(x)\, f_2(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g_1(x)\, g_2(x)$.

(Pas d'analogue du (iii) pour la somme : $1 + x \underset{x \to 0}{\sim} 1 + x^2$ et $-1 \underset{x \to 0}{\sim} -1$ mais $x \underset{x \to 0}{\not\sim} x^2$.)

(*) Si $D = \mathbb{N}$, on définit de même $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$ et $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ pour les suites réelles, en remplaçant (H) par « $+\infty$ est borne supérieure de J » et l'ensemble de définition J de ε et λ par $J \cap \mathbb{N}$, où variera n.

Démonstration

On traite seulement la dernière implication, pour expliquer les idées.

On suppose que $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$. Cela signifie que :

$f_1(x) = \lambda_1(x)\, g_1(x)$ quand $x \in J_1$, où $\lambda_1 : \underbrace{J_1}_{\text{un intervalle ouvert contenant } x_0 \text{ inclus dans } I} \to \mathbb{R}$ vérifie $\lambda_1(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$;

$f_2(x) = \lambda_2(x)\, g_2(x)$ quand $x \in J_2$, où $\lambda_2 : \underbrace{J_2}_{\text{un intervalle ouvert contenant } x_0 \text{ inclus dans } I} \to \mathbb{R}$ vérifie $\lambda_2(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$.

On en déduit que : $f_1(x)\, f_2(x) = \lambda_1(x)\, \lambda_2(x)\, g_1(x)\, g_2(x)$ quand $x \in J_1 \cap J_2$, où

$J_1 \cap J_2$ est un intervalle ouvert contenant x_0 inclus dans I ;

en posant $\lambda_3(x) := \lambda_1(x)\, \lambda_2(x)$ quand $x \in J_1 \cap J_2$, on a $\lambda_3(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$.

En conclusion : $f_1(x)\, f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)\, g_2(x)$. □

Cas particuliers (à connaître)

Soient $f : \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(a) On a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(1) \iff f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0\,;$$
$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big((x-x_0)^n\big) \iff \left(f(x_0) = 0 \text{ et } \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} \underset{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}{\longrightarrow} 0\right).$$

Dans ces deux cas, la fonction ε de la définition peut être choisie définie sur I (avec unicité).

(b) Si $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} k \iff f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} k\,;$$
$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} k\,(x-x_0)^n \iff \left(f(x_0) = 0 \text{ et } \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} \underset{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}{\longrightarrow} k\right).$$

Dans ces deux cas, la fonction λ de la définition peut être choisie définie sur I (avec unicité).

Démonstration

Immédiate. □

Exemple

On a d'après ce qui précède : $\sin x \underset{x\to 0}{=} o(1)$ et $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ (car $\cos'(0) = 1$).

Définition-Proposition

Soient $f : \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f *a un développement limité à l'ordre* n *au voisinage de* x_0 s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que : $f(x) - \big(a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n\big) \underset{x\to x_0}{=} o((x-x_0)^n)$ (*).

Dans ce cas, les réels $a_0, \dots, a_n$ sont uniques et l'application $x \mapsto a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ s'appelle $\underbrace{\textit{le développement limité à l'ordre } n}_{DL_n}$ *de* f *en* x_0.

Démonstration

On suppose que $a_0, \dots, a_n$ sont des réels pour lesquels on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \varepsilon(x)\,(x-x_0)^n$$

quand $x \in I$, où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifie $\varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. On a pour $x \in I \setminus \{x_0\}$:

$$\frac{f(x) - \big(a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_{k-1}(x-x_0)^{k-1}\big)}{(x-x_0)^k} = a_k + \sum_{l=1}^{n-k} a_{k+l}(x-x_0)^l + \varepsilon(x)\,(x-x_0)^{n-k} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a_k.$$

D'où : $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a_0$, puis $\frac{f(x)-a_0}{x-x_0} \underset{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}{\longrightarrow} a_1$, puis $\frac{f(x)-(a_0+a_1(x-x_0))}{(x-x_0)^2} \underset{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}{\longrightarrow} a_2$, ...

Cela montre l'unicité de $a_0, \dots, a_n$. □

(∗) Par abus, on traduira cette égalité sous la forme suivante :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Proposition

On reprend f, x_0, n comme dans la définition-proposition.

(a) L'application f a un DL_0 en x_0 si et seulement si f est continue en x_0.
Dans ce cas : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + o(1)$.

L'application f a un DL_1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.
Dans ce cas : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + o(x-x_0)$, où la tangente au graphe de f au point $(x, f(x_0))$ est la droite affine $D :\ y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)$.

(b) Soient $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$. On a : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ si et seulement si $f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$.

Cela permet de se ramener au cas $x_0 = 0$.

(c) On suppose que : $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.
Alors : $f(-x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n\, a_n x^n + o(x^n)$.
D'où (unicité du DL_n) :
- si f est paire, alors $a_k = 0$ quand k est impair ;
- si f est impaire, alors $a_k = 0$ quand k est pair.

Démonstration

(a) et (b) Laissés en exercice.

(c) On a une égalité de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x)\, x^n$ quand $x \in I$, où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifie $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Il en résulte l'égalité suivante qui fournit le second DL_n :
$f(-x) = a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n\, a_n x^n + (-1)^n\, \varepsilon(-x)\, x^n$ avec $(-1)^n\, \varepsilon(-x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

La conclusion résulte de l'unicité des coefficients d'un DL_n. □

Exemple (DL le plus important)

On considère $f : \begin{array}{rcl}]-\infty, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$.

Pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a : $\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} + \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \underbrace{\dfrac{x}{1-x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} x^n$.

D'où : $\boxed{\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)}$.

Convention

Soient $f : \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On constate que, si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ et $n \geq 1$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1})$.

Par abus, on écrira cette implication sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to x_0}{=} a_0 + \cdots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \\ &\underset{x\to x_0}{=} a_0 + \cdots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1}). \end{aligned}$$

Par exemple, on se permettra d'écrire :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$$

où « $x + o(x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$ » signifie que toute fonction de la forme $x \mapsto x + \varepsilon(x)\, x$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ s'écrit aussi sous la forme $x \mapsto \tilde{\varepsilon}(x)$ avec $\tilde{\varepsilon}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la fonction nulle (unicité du DL_1).

Théorème (« *formule de Taylor-Young* ») $\longleftarrow$[sous l'hypothèse « f C^n » : corollaire de Taylor-Lagrange]

Soient $f : \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
On suppose que f est n fois dérivable.

On a : $\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big)}$.

Démonstration $\longleftarrow$[on la réutilisera pour passer d'un DL_n de f' à un DL_{n+1} de f]

On pose : $R_n(x) = f(x) - \Big(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\Big)$ pour $x \in I$.

On montre, par récurrence sur $n \geq 1$, que l'assertion suivante est vraie :

(H_n) : pour toute fonction n fois dérivable $f : I \to \mathbb{R}$, la fonction R_n vérifie $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}{\longrightarrow} 0$.

Vu que $R_n(x_0) = 0$, cela permettra d'obtenir $R_n(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big((x - x_0)^n\big)$ et de conclure.

- Cas $n = 1$. On a : $\frac{R_1(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}{\longrightarrow} 0$, donc (H_1) est vraie.

- Soit $n \geq 1$ tel que (H_n) est vraie. On se donne $f : I \to \mathbb{R}$ qui est $n + 1$ fois dérivable.

On a : $R'_{n+1}(x) = f'(x) - \Big(f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\Big)$ pour $x \in I$.

Donc R'_{n+1} est « le R_n associé à f' ». D'après (H_n), on en déduit que : $\frac{R'_{n+1}(t)}{(t - x_0)^n} \underset{\substack{t \to x_0 \\ t \neq x_0}}{\longrightarrow} 0$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in I \setminus \{x_0\}$. D'après le théorème des accroissements finis (qui utilise seulement la dérivabilité de f), il existe $c \in \,]x, x_0[$ tel que : $R_{n+1}(x) = (x - x_0)\, R'_{n+1}(c)$.

Vu ce qui précède, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\left|\frac{R'_{n+1}(t)}{(t - x_0)^n}\right| < \varepsilon$ dès que $t \in I$ et $0 < |t - x_0| < \alpha$.

D'où : $\left|\frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}}\right| = \underbrace{\left|\frac{R'_{n+1}(c)}{(c - x_0)^n}\right|}_{\substack{< \varepsilon \\ \text{dès que } |c - x_0| < \alpha}} \times \underbrace{\left|\frac{c - x_0}{x - x_0}\right|^n}_{\leq 1} < \varepsilon$ dès que $x \in I$ et $0 < |x - x_0| < \alpha$.

Ainsi (H_{n+1}) est vraie. □

Remarque (curiosité admise)

Le théorème reste valable, avec la même démonstration, en remplaçant l'hypothèse « f est n fois dérivable » par « $\underbrace{f \text{ est } n-1 \text{ fois dérivable}}_{\text{on enlève cela si } n = 1}$ et $\underbrace{f^{(n-1)}}_{f \text{ si } n = 1}$ est dérivable en x_0 ».

Quand $n = 1$, on sait que cette condition est nécessaire pour avoir un DL_1 en x_0.

Quand $n = 2$, cette condition n'est plus nécessaire : l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ vérifie $\underbrace{f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^2)}_{\mathrm{DL}_2 \text{ en } 0}$ bien que $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$ n'ait pas de limite quand $x \to 0$ avec $x \neq 0$.

2. Opérations sur les DL

En annexe : un formulaire pour les développements limités usuels.

Proposition 1

Soient $f, g : \underset{\text{intervalle ouvert contenant } 0}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n, p, q, r \in \mathbb{N}$.

(a) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et, $u(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$ et $v(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$ alors $\alpha\, u(x) + \beta\, v(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$.

(b) On suppose que : $f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$

et $g(x) \underset{x \to 0}{=} b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$.

Alors : $\quad (f+g)(x) \underset{x\to 0}{=} (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+o(x^n)$
« la somme des DL_n de f et g en 0 est un DL_n de $f+g$ en 0 ».

(c) Si $u(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$ et $v(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^q)$, alors $u(x)\,x^r \underset{x\to 0}{=} o(x^{p+r})$ et $u(x)\,v(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{p+q})$.
Si $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} k\,x^p$ avec $k\neq 0$ et $v(x) \underset{x\to 0}{\sim} l\,x^q$ avec $l\neq 0$, alors $u(x)\,v(x) \underset{x\to 0}{\sim} kl\,x^{p+q}$.

(d) On suppose que : $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p\,x^p+\cdots+a_{p+r-1}\,x^{p+r-1}+o(x^{p+r-1})$
et $\quad g(x) \underset{x\to 0}{=} b_q\,x^q+\cdots+b_{q+r-1}\,x^{q+r-1}+o(x^{q+r-1})$ $\quad$ avec $r\geq 1$.

Alors : $\quad (fg)(x) \underset{x\to 0}{=} a_p\,b_q\,x^{p+q}+(a_p\,b_{q+1}+a_{p+1}\,b_q)\,x^{p+q+1}+\cdots$
$\qquad + (a_p\,b_{q+r-1}+a_{p+1}\,b_{q+r-2}+\cdots+a_{p+r-1}\,b_q)\,x^{p+q+r-1}+o(x^{p+q+r-1})$.

En particulier :
– des DL_n de f et g en 0 fournissent un DL_n de fg en 0 (cas $p=q=0$ et $r=n+1$) ;
– quand $a_p\neq 0$ et $b_q\neq 0$, a fortiori $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p\,x^p$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} b_q\,x^q$, « le produit tronqué (c-à-d en écartant les monômes de degré trop grand) des DL de f et g en 0 avec r termes à partir du 1er non-nul est un DL de fg en 0 avec r termes à partir du 1er non-nul ».(∗)

Démonstration

(a) Cas particulier de la proposition (a) (iv), qui suit la définition du début du II 1.

(b) Il suffit d'appliquer le (a) en prenant :
$u(x) := f(x)-(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)$ et $v(x) := g(x)-(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$.

(c) Si $u(x)=\varepsilon_1(x)\,x^p$ et $v(x)=\varepsilon_2(x)\,x^q$ pour $x\in I$, avec $\varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, alors $u(x)\,x^r=\varepsilon_1(x)\,x^{p+r}$ et $u(x)\,v(x)=(\varepsilon_1(x)\,\varepsilon_2(x))\,x^{p+q}$ pour $x\in I$. D'où le 1er résultat. Le 2e est un cas particulier de la proposition (b) (iii), qui suit la définition du début du II 1.

(d) Par hypothèse il existe $u,v:I\to\mathbb{R}$ avec $u(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{p+r-1})$ et $v(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{q+r-1})$ tels que : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{r-1} a_{p+k}\,x^{p+k}+u(x)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{l=0}^{r-1} b_{q+l}\,x^{q+l}+v(x)$.
D'après (a) et (c), on en déduit que $f(x)\,g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{m=0}^{2(r-1)} \Big(\sum_{k+l=m} a_{p+k}\,b_{q+l}\Big)x^{p+q+m}+o(x^{p+q+r-1})$
où chaque monôme en x^{p+q+m} avec $m>r-1$ s'écrit $o(x^{p+q+r-1})$. Cela permet de conclure. $\square$

Exemple

DL_3 en 0 de $h(x)=\sin x\cos x$ (sans reconnaître $\frac{1}{2}\sin(2x)$) ?

Méthode efficace et sans réfléchir : utiliser des DL_3 en 0 de $f:x\mapsto\sin x$ et $g:x\mapsto\cos x$. Les applications f et g, qui sont C^∞, se développent à tout ordre en 0 avec Taylor-Young.

Pour illustrer le (c) de la proposition 1, on s'oblige ici à éviter les développements inutiles. On a $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$, donc $\sin x\,\cos x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Cela donne les 1ers termes des DL en 0. On veut 3 termes du DL de $\sin x\cos x$ « à partir du 1er non-nul ». On utilise donc :
$\sin x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ et $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ (seulement 3 termes à partir du 1er non-nul).

Quelque soit la méthode, on conclut en utilisant le (a) et le (c) de la proposition 1 :
$\sin x\,\cos x \underset{x\to 0}{=} (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\,(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \underset{x\to 0}{=} \cdots \underset{x\to 0}{=} x-\frac{2}{6}x^3+o(x^3)$.
Attention : il faut écrire correctement les termes de la forme $o(x^n)$ à chaque étape du calcul.

Proposition 2

Soient $f:\underset{\substack{\text{intervalle ouvert}\\ \text{contenant } 0}}{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\underset{\substack{\text{intervalle ouvert}\\ \text{contenant } 0}}{J}\longrightarrow\mathbb{R}$ tels que $f(I)\subseteq J$ et $f(0)=0$.
Si $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p\,x^p+o(x^p)$ $(p\geq 1)$ et $g(y) \underset{y\to 0}{=} b_0+b_l\,y^l+\cdots+b_m\,y^m+o(y^m)$ $(m\geq l\geq 1)$,

(∗) Cela se déduit de la ligne précédente si on utilise : $f(x)\,g(x)=x^{p+q}\,(x^{-p}f(x))\,(x^{-q}g(x))$ quand $x\neq 0$.

alors : $\quad g(f(x)) \underset{x\to 0}{=} b_0 + b_l\, f(x)^l + \cdots + b_m\, f(x)^m + o(\underbrace{(x^p)^m}_{\text{idée (quand } a_p \neq 0) \text{ : on remplace } y \text{ dans } o(y^m) \text{ par un équivalent de } f(x) \text{ à une constante multiplicative près}})$.

En particulier :

– des DL_n de f et g en 0 fournissent un DL_n de $g\circ f$ en 0 (cas $p=1$ et $m=n$) ;

– « le reste du DL de $g\circ f$ en 0 obtenu à partir d'un DL de f en 0 avec r termes à partir du 1^{er} non-nul, a le plus petit ordre entre le reste du DL de f^l en 0 qui s'en déduit et $o((x^p)^m)$ ».

Démonstration

On a : $f(x) = a_p x^p + \varepsilon_1(x)\, x^p$ pour $x\in I$ et $g(y) = b_0 + b_l y^l + \cdots + b_m y^m + \varepsilon_2(y)\, y^m$ pour $y\in J$, où $\varepsilon_1 : I\to\mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 : J\to\mathbb{R}$ vérifient $\varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\varepsilon_2(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc : $g(f(x)) = b_0 + b_l\, f(x)^l + \cdots + b_m\, f(x)^m + \varepsilon_2(f(x))(a_p + \varepsilon_1(x))^m\, (x^p)^m$ pour $x\in I$, avec $\varepsilon_2(f(x))(a_p+\varepsilon_1(x))^m \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Cela donne le résultat. □

Exemple

DL_4 en 0 de $h(x) = \exp(\cos x)$?

Méthode efficace : utiliser des DL_4 de $\tilde{f} : x\mapsto \cos x$ en 0 et de $\tilde{g} : z\mapsto \mathrm{e}^z$ au bon endroit.

On cherche ici à éviter les DL inutiles. Au brouillon par Taylor-Young :

$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + o(x^n)$ et $\exp(y) \underset{y\to 0}{=} 1 + y + \cdots + o(y^m)$ (où $m,n\in\mathbb{N}$ seront à choisir)

puis : $h(x) \underset{x\to 0}{=} \exp(\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + o(x^n)}_{\text{ne tend pas vers 0 (contrairement à } y)}) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\ \underbrace{\exp}_{g}\big(\underbrace{-\frac{x^2}{2} + \cdots + o(x^n)}_{\text{f(x)}}\big)$

enfin, compte tenu de la proposition 2 : $h(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\left[1 + (-\frac{x^2}{2} + \cdots + o(x^n))^1 + \cdots + o((x^2)^m)\right]$.

On rédige maintenant avec $n=4$ et $m=2$, sans explication sur ces choix.

On a : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

Donc : $h(x) \underset{x\to 0}{=} \exp(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\, \exp(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))$ avec $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

On a par ailleurs : $\exp(y) \underset{y\to 0}{=} 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$.

D'où : $h(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\left[1 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)) + \frac{1}{2}\ \underbrace{(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))^2}_{\frac{x^4}{4} + o(x^4)} + o((x^2)^2)\right]$

en développant le carré par exemple avec l'égalité $\Big(\sum\limits_{1\le i\le n} a_i\Big)^2 = \sum\limits_{1\le i\le n} a_i^2 + 2 \sum\limits_{1\le i<j\le n} a_i\, a_j$.

Finalement : $h(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}\, x^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}\, x^4 + o(x^4)$.

Lemme ⟵[DL_k de $\frac{A}{B}$ en 0]

Soient $A, B\in\mathbb{R}[X]$ tels que $B(0)\neq 0$, et $k\in\mathbb{N}$.

Il existe $Q, R\in\mathbb{R}[X]$ uniques tels que : $A = BQ + X^{k+1}R$ et $\deg Q\le k$

« division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre k » (avec $\deg 0 := -\infty$).

Voici l'algorithme à utiliser :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \overbrace{a_p X^p + a_{p+1}X^{p+1} + \quad\cdots\quad + \ a_n X^n}^{A} & \overbrace{b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m}^{B} \\
\ominus & a_p X^p + \frac{a_p b_1}{b_0} X^{p+1} + \quad \cdots & \underbrace{\frac{a_p}{b_0} X^p + \frac{a'_{p+1}}{b_0} X^{p+1} + \cdots}_{Q} \\
\hline
= & \quad a'_{p+1} X^{p+1} + \quad\cdots\quad\cdots\quad + \ a'_{n'} X^{n'} & \text{(calcul jusqu'au coefficient de } X^k) \\
 & \ominus \quad \cdots & \\
\hline
 & = \qquad\qquad \cdots\quad\cdots\quad\cdots & \\
 & \qquad\qquad /\!/\quad /\!/\quad /\!/\quad /\!/\quad /\!/ & \\
\hline
 & \qquad\qquad \underbrace{a''_{k+1} X^{k+1} + \quad\cdots\quad + \ a''_{n''} X^{n''}}_{X^{k+1}\, R} &
\end{array}
$$

Démonstration (admise)

On va montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_k[X]$ unique tel que $A - BQ \in X^{k+1}\,\mathbb{R}[X]$.

L'unicité est immédiate puisque si $\widetilde{Q}$ convient aussi, comme $\mathrm{val}(B) = 0$ on a : $\widetilde{Q} - Q \in \mathbb{R}_k[X]$ et $\mathrm{val}(\widetilde{Q} - Q) \geq k+1$, donc $\widetilde{Q} = Q$.

On montre par récurrence descendante sur l l'existence de Q à (B, k) fixé avec $\mathrm{val}(A) \geq l$. Lorsque $l = k+1$, on peut choisir $Q = 0$.

On suppose que c'est acquis pour $p+1$ et part d'un A de valuation p (cf. l'algorithme). On introduit A_1 tel que $A = B\left(\frac{a_p}{b_0} X^p\right) + A_1$, donc $\mathrm{val}(A_1) \geq p+1$. Par hypothèse, il existe $Q_1 \in \mathbb{R}_k[X]$ tel que $A_1 - BQ_1 \in X^{k+1}\,\mathbb{R}[X]$. D'où : $A - B\big(\frac{a_p}{b_0} X^p + Q_1\big) \in X^{k+1}\,\mathbb{R}[X]$. □

Proposition 3

Soient $f, g : \underbrace{I}_{\text{intervalle ouvert contenant } 0} \longrightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que : $$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p\, x^p + \cdots + a_{p+r-1}\, x^{p+r-1} + o(x^{p+r-1}) \\ \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} b_q\, x^q + \cdots + b_{q+r-1}\, x^{q+r-1} + o(x^{q+r-1}) \end{array}\right. \quad \text{avec } r \geq 1 \text{ et } b_q \neq 0.$$

On cherche le DL $\underbrace{\text{généralisé}}_{\text{il peut y avoir des puissances négatives de } x}$ de $\frac{f}{g}$ au voisinage de 0 sans 0, avec r coefficient à partir de $\frac{a_p}{b_q}\, x^{p-q}$.

<u>Méthode 1</u>

On a : $$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}}{=} \left(a_p\, x^{p-q} + \cdots + a_{p+r-1}\, x^{p-q+r-1} + o(x^{p-q+r-1})\right) \times \frac{1}{b_q}\left(\frac{1}{1 - \left(-\frac{b_{q+1}}{b_q}\, x - \cdots - \frac{b_{q+r-1}}{b_q}\, x^{r-1} + o(x^{r-1})\right)}\right)$$

où la grande fraction a un DL en 0 par composition avec $y \mapsto \frac{1}{1-y}$.

<u>Méthode 2</u>

On a : $$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}}{=} x^{p-q}\, Q(x) + o(x^{p-q+r-1})$$

où Q est le quotient avec r coefficients dans la division suivant les puissances croissantes de $A := a_p + a_{p+1}\, X + \cdots + a_{p+r-1}\, X^{r-1}$ par $B := b_q + b_{q+1}\, X + \cdots + b_{q+r-1}\, X^{r-1}$.

En particulier quand $a_p \neq 0$ et $g(0) \neq 0$: « le quotient avec r coefficients dans la division suivant les puissances croissantes du DL de f en 0 par celui de g en 0, avec pour chacun r termes à partir du 1^{er} non-nul, est un DL de $\frac{f}{g}$ en 0 avec r termes à partir du 1^{er} non-nul ».

Démonstration

(a) On développe la grande fraction à l'aide de : $\dfrac{1}{1-y} \underset{y\to 0}{=} 1 + y + \cdots + y^{r-1} + o(y^{r-1})$. En prenant en compte la technique de calcul du DL d'un produit, cela donne le résultat.

(b) On a : $f(x) = x^p\,(A(x) + \varepsilon_1(x)\, x^{r-1})$ avec $\varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $g(x) = x^q\,(B(x) + \varepsilon_2(x)\, x^{r-1})$ avec $\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Division suivant les puissances croissantes : $A(x) = B(x)\, Q(x) + x^r\, R(x)$. Donc $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{p-q}\, Q(x) + x^{p-q}\left(\frac{A(x) + \varepsilon_1(x)\, x^{r-1}}{B(x) + \varepsilon_2(x)\, x^{r-1}} - Q(x)\right) = x^{p-q}\, Q(x) + \frac{x\, R(x) + \varepsilon_1(x) - Q(x)\, \varepsilon_2(x)}{B(x) + \varepsilon_2(x)\, x^{r-1}}\, x^{p-q+r-1}$.

D'où le DL de $\frac{f}{g}$ annoncé. □

Exemple

DL_5 de tan en 0 ?

Comme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{x\to 0}{\sim} x$ on cherche 5 termes à partir du 1^{er} non-nul, en utilisant : $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ et $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

<u>Méthode 1</u>

On a : $\tan x \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \frac{1}{1 - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4))}$ avec $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

D'où, en tenant compte du DL $\frac{1}{1-y} \underset{y\to 0}{=} 1+y+y^2+o(y^2)$:

$\tan x \underset{x\to 0}{=} \big(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\big)\big(1+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4))+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4))^2+o((x^2)^2)\big)$

et enfin : $\tan x \underset{x\to 0}{=} \big(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\big)\big(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}\,x^4+o(x^4)\big) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}\,x^5+o(x^5)$.

<u>Méthode 2</u>

On effectue une division suivant les puissances croissantes de $X-\frac{X^3}{6}+\frac{X^5}{120}$ par $1-\frac{X^2}{2}+\frac{X^4}{24}$ jusqu'à obtenir 5 termes à partir du 1[er] non-nul (sans écrire les monômes de degré >5) :

$$
\begin{array}{cl|l}
 & X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} & 1-\frac{X^2}{2}+\frac{X^4}{24} \\ \cline{3-3}
- & X - \frac{X^3}{2} + \frac{X^5}{24} & X + \frac{X^3}{3} + \frac{2}{15}X^5 \\ \cline{2-2}
= & \frac{X^3}{3} - \frac{X^5}{30} & \\
- & \frac{X^3}{3} - \frac{X^5}{6} + \cdots & \\ \cline{2-2}
= & \frac{2}{15}X^5 + \cdots & \\
 & // \quad // \; // &
\end{array}
$$

Ainsi : $\tan x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}\,x^5+o(x^5)$.

3. Construction du formulaire

Méthodes d'obtention d'un DL de f

On se ramène de x_0 à 0 en considérant $f(x_0+h)$ pour « h proche de 0 ».

(1) Calcul direct ou par récurrence, quand f est C^∞, de $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$ et utilisation de la formule de Taylor-Young

$\longrightarrow$ DL en 0 de e^x, $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$.

(2) Décomposition de f à l'aide de : sommes (conservation de l'ordre du DL), produits ou quotients (conservation de l'ordre relatif du DL), composées

$\longrightarrow$ DL en 0 de $\cosh x$, $\sinh x$, $\tan x$ et $\tanh x$ pour les petits ordres.

(3) Intégration terme à terme d'un DL de f', ce qui est justifié quand f est C^∞ par une comparaison des formules de Taylor-Young pour f et f'

$\longrightarrow$ DL en 0 de $\ln(1+x)$, $\arctan x$, $\operatorname{artanh} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arsinh} x$.

Proposition

Soit $f : \underset{\text{intervalle ouvert contenant } 0}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

On suppose que : $f'(x) \underset{x\to 0}{=} b_0+b_1\,x+\cdots+b_n\,x^n+o(x^n)$.

Alors on a : $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0)+b_0\,x+b_1\,\frac{x^2}{2}+\cdots+b_n\,\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$.

Démonstration

On pose : $R(x)=f(x)-\Big(f(0)+b_0\,x+b_1\,\frac{x^2}{2}+\cdots+b_n\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big)$ pour $x\in I$.

Donc : $R'(x)=f'(x)-(b_0+b_1\,x+\cdots+b_n\,x^n)$ pour $x\in I$.

On reprend la démonstration de la formule de Taylor-Young et obtient : $\frac{R(x)}{x^{n+1}} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0$. □

Complément

Soit $f : \underset{\text{intervalle ouvert contenant } 0}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. $\longleftarrow$[d'où $\begin{array}{l} I \to f(I) \\ x\mapsto f(x)\end{array}$ bijective]

On suppose que : $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_1\,x+\cdots+a_n\,x^n+o(x^n)$ avec $a_1\neq 0$, donc $f(0)=0$.

Alors la réciproque « f^{-1} » de la bijection $\begin{array}{l} I \to f(I) \\ x\mapsto f(x)\end{array}$, qui vérifie $f^{-1}(0)=0$, a un DL_n en 0 dont les coefficients s'obtiennent par identification des DL_n dans l'égalité $f^{-1}(f(x))=x$.

Démonstration

Pour tous $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$, on a :

$b_1 f(x)+\cdots+b_n f(x)^n \underset{x\to 0}{=} b_1(a_1x+\text{termes de deg}\geq 2)+b_2(a_1^2x^2+\text{termes de deg}\geq 3)+\cdots+b_n a_1^n x^n+o(x^n)$.

On peut choisir (système triangulaire) $b_1, ..., b_n$ tels que : $(\star)$ $b_1 f(x)+\cdots+b_n f(x)^n \underset{x\to 0}{=} x+o(x^n)$.

De plus : $f(0)=0$ et $f'(0)=a_1$, donc $f^{-1}(0)=0$ et $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{a_1}$, puis $f^{-1}(y) \underset{y\to 0}{=} \frac{1}{a_1}y+o(y)$.

On remplace x par $f^{-1}(y)$ dans $(\star)$, via la proposition 2 : $b_1\, y+\cdots+b_n\, y^n \underset{y\to 0}{=} f^{-1}(y)+o(y^n)$. □

Exemple

DL_5 de $\tan y$ en 0 à partir du DL_5 de $\arctan x$ en 0 ?

On a : $\arctan x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$. D'après le complément, $\tan y$ a un DL_5 en 0 de la forme $\tan y \underset{y\to 0}{=} b_1y+\cdots+b_5y^5+o(y^5)$ où $b_1, ..., b_5 \in \mathbb{R}$ s'obtiendront par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan x) &\underset{x\to 0}{=} b_1 \arctan x+\cdots+b_5(\arctan x)^5+o(x^5)\\
&\underset{x\to 0}{=} b_1\left(x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+o(x^5)\right)+b_2\left(x^2-2x\tfrac{x^3}{3}+o(x^5)\right)+b_3\left(x^3-3x^2\tfrac{x^3}{3}+o(x^5)\right)\\
&\qquad +b_4\left(x^4+o(x^5)\right)+b_5\left(x^5+o(x^5)\right)^5+o(x^5)\\
&\underset{x\to 0}{=} b_1x+b_2x^2+\left(-\tfrac{1}{3}b_1+b_3\right)x^3+\left(-\tfrac{2}{3}b_2+b_4\right)x^4+\left(\tfrac{1}{5}b_1-b_3+b_5\right)x^5+o(x^5).
\end{aligned}$$

Compte tenu de l'égalité $\tan(\arctan x)=x$ pour $x\in\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\begin{cases} b_1 & & & & =1\\ & b_2 & & & =0\\ -\frac{1}{3}b_1 & & +b_3 & & =0\\ & -\frac{2}{3}b_2 & & +b_4 & =0\\ \frac{1}{5}b_1 & & -b_3 & & +b_5=0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} b_1 = 1\\ b_2 = 0\\ b_3=\frac{1}{3}\\ b_4 = 0\\ b_5=\frac{2}{15}\end{cases} \quad \text{puis} \quad \tan y \underset{y\to 0}{=} y+\frac{1}{3}y^3+\frac{2}{15}y^5+o(y^5).$$

III. Tangentes et asymptotes

On cherche à étudier l'image d'une application continue $M : \begin{array}{ccc} \underset{\text{intervalle ouvert non vide}}{I} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ t & \longmapsto & \big(x(t), y(t)\big)\end{array}$, en commençant par le cas où $M : t\mapsto (t, f(t))$ avec $f : I\to\mathbb{R}$ continue.

1. Tangentes

Dans ce paragraphe on fixe un réel $t_0 \in I$.

Définition (indépendante du choix du repère de $\mathbb{R}^2$)

On dit que M a pour tangente en t_0 une droite affine D de $\mathbb{R}^2$ si :

(i) $M(t_0)\in D$ et $M(t)\neq M(t_0)$ quand $t\neq t_0$ est « assez proche de t_0 » ;

(ii) la pente de la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ tend vers la pente de D quand $t\to t_0$ avec $t\neq t_0$.

Cas d'un graphe

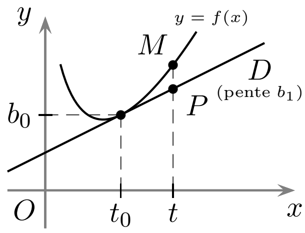
On suppose que $f(t) \underset{t\to t_0}{=} b_0+b_1(t-t_0)+b_q(t-t_0)^q+o\big((t-t_0)^q\big)$ avec $q\geq 2$ et $b_q\neq 0$.

On introduit la tangente $D : y=b_0+b_1(x-t_0)$ en t_0 au graphe de f.

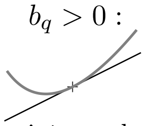
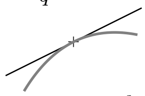
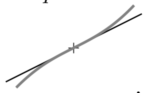
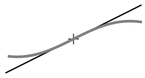
On se place au point M du graphe de f d'abscisse t et note P le point de D d'abscisse t :

L'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{PM}$ est $f(t)-(b_0+b_1(t-t_0))$.

Son signe détermine la position de M par rapport à D.



Par hypothèse, on a : $f(t)-(b_0+b_1(t-t_0)) \underset{t\to t_0}{\sim} b_q(t-t_0)^q$.
Ainsi, en tenant compte de la définition de la limite, l'ordonnée de $\overrightarrow{PM}$ est du signe de $b_q(t-t_0)^q$ quand $t\neq t_0$ est « proche de t_0 » (exercice). D'où le tableau suivant :

q pair		q impair	
$b_q>0$:  concavité vers le haut	$b_q<0$:  concavité vers le bas	$b_q>0$:  points d'inflexion	$b_q<0$: 

Proposition

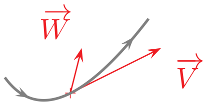
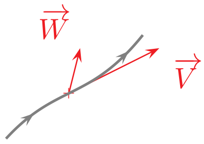
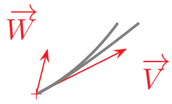
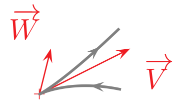
(a) On suppose que $\begin{cases} x(t) \underset{t\to t_0}{=} a_0+a_p(t-t_0)^p+o\big((t-t_0)^p\big) \\ y(t) \underset{t\to t_0}{=} b_0+b_p(t-t_0)^p+o\big((t-t_0)^p\big) \end{cases}$ avec $p\geq 1$ et $\vec{V} := \binom{a_p}{b_p}\neq 0$.

La courbe M a pour tangente en t_0 la droite affine D passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{V}$.

(b) On suppose que $\begin{cases} x(t) \underset{t\to t_0}{=} a_0+a_p(t-t_0)^p+\cdots+a_q(t-t_0)^q+o\big((t-t_0)^q\big) \\ y(t) \underset{t\to t_0}{=} b_0+b_p(t-t_0)^p+\cdots+b_q(t-t_0)^q+o\big((t-t_0)^q\big) \end{cases}$

avec $1\leq p<q$, $\vec{V} := \binom{a_p}{b_p}\neq 0$, $\binom{a_{p+1}}{b_{p+1}},\ldots,\binom{a_{q-1}}{b_{q-1}}\in \operatorname{Vect}\vec{V}$, et $\vec{W} := \binom{a_q}{b_q}\notin \operatorname{Vect}\vec{V}$.

En posant $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = X(t)\,\vec{V}+Y(t)\vec{W}$, on a : $X(t) \underset{t\to t_0}{\sim} (t-t_0)^p$ et $Y(t) \underset{t\to t_0}{\sim} (t-t_0)^q$.
On en déduit que : $Y(t) \underset{t\to t_0}{=} o\big(X(t)\big)$. Les signes de $X(t)$ et $Y(t)$ donnent les schémas suivants :

	q pair		q impair	
p impair		point ordinaire		point d'inflexion
p pair		rebroussement de 2^{e} espèce		rebroussement de 1^{re} espèce

Démonstration

(a) On a : $M(t_0)=\binom{a_0}{b_0}$. Donc $\frac{1}{(t-t_0)^p}\overrightarrow{M(t_0)M(t)} \underset{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}}{\longrightarrow} \vec{V}$, ce qui fournit la tangente.

(b) On note aussi : $\binom{a_{p+1}}{b_{p+1}} = \alpha_{p+1}\,\vec{V}$ et ... et $\binom{a_{q-1}}{b_{q-1}} = \alpha_{q-1}\,\vec{V}$. Le résultat découle de :

$$\begin{cases} X(t) \underset{t\to t_0}{=} \big(1+\alpha_{p+1}(t-t_0)+\cdots+\alpha_{q-1}(t-t_0)^{q-p-1}\big)(t-t_0)^p \ + \ o\big((t-t_0)^q)\big) \\ Y(t) \underset{t\to t_0}{=} (t-t_0)^q+o\big((t-t_0)^q\big) \qquad \text{[cf. } (1,0)=\beta_1\,\vec{V}+\gamma_1\,\vec{W} \text{ et } (0,1)=\beta_2\,\vec{V}+\gamma_2\,\vec{W}] \end{cases}.$$

$\square$

Remarque

On suppose ici M deux fois dérivable avec $M'(t_0)\neq 0$ (« M a un point régulier en t_0 »).
Cas $p=1$ du (a) : la courbe M a pour tangente en t_0 la droite D de repère $(M(t_0), M'(t_0))$.

Pente de cette tangente : $\boxed{m(t_0) := \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \ \in\ \mathbb{R}\cup\{\infty\}}$. $\left[\text{Cas } p>1 \text{ du (a) : } m(t_0) := \frac{b_p}{a_p} \underbrace{=}_{\text{si } x' \text{ et } y' \text{ ont des DL}_{p-1} \text{ en } t_0} \lim_{t\to t_0, t\neq t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}.\right]$
Comme p est impair, on s'attend à avoir un point ordinaire ou un point d'inflexion.

Il est possible de discuter de cela géométriquement sans chercher un éventuel vecteur $\vec{W}$:
– cas $x'(t_0)\neq 0$ ($\vec{V}$ est vers la droite ou la gauche suivant le signe de $x'(t_0)$) : M a un point d'inflexion en $t=t_0$ si $m'(t)$ passe de $+$ à $-$ ou de $-$ à $+$ quand t passe par t_0 ;

[Cas $p=1$ du (b), si x'' et y'' ont des DL_{q-2} en t_0 : $x'(t)^2 m'(t) \underset{t\to t_0}{\sim} q(q-1)(a_1 b_q - a_q b_1)(t-t_0)^{q-2}$.]
– cas $x'(t_0) = 0$ ($\overrightarrow{V}$ est vers le haut ou le bas suivant le signe de $y'(t_0)$) : M a un point d'inflexion en $t=t_0$ si $x'(t)$ passe de $+$ à $+$ ou de $-$ à $-$ quand t passe par t_0.

2. Asymptotes

[Comme M est continue, la norme $\|M(t)\|$ reste bornée quand $t \in [a,b]$ avec $a, b \in I$.]

Dans ce paragraphe on fixe une borne u de I. On écrira « $t \to u$ » au lieu de « $t \to u$, $t \in I$ ».

Définition (indépendante du choix du repère de $\mathbb{R}^2$)

(a) On dit que M a pour asymptote en u une droite affine D de $\mathbb{R}^2$ si :

(i) $\|M(t)\| \underset{t\to u}{\longrightarrow} +\infty$;

(ii) la distance de $M(t)$ à D tend vers la 0 quand $t \to u$.

(b) On dit que M a pour direction asymptotique en u une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ de $\mathbb{R}^2$ si :

(i) $\left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\| \underset{t\to u}{\longrightarrow} +\infty$;

(ii) la pente $\frac{y(t)}{x(t)}$ du vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ tend vers la pente de $\overrightarrow{D}$ quand $t \to u$, dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

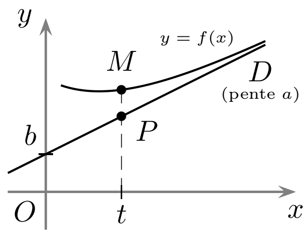
[N'implique pas que la pente de la courbe tende vers la pente de $\overrightarrow{D}$, cf. le graphe de la fonction sinus.]

Cas d'un graphe (on écarte le cas facile des asymptotes verticales)

On se place dans le cas où $u = +\infty$ est une borne de I (même méthode pour $u = -\infty$).

On suppose que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} at + b + \frac{c}{t^k} + o\left(\frac{1}{t^k}\right)$ avec $k \geq 1$ et $c \neq 0$.

On introduit la droite $D : y = ax + b$.



On se place au point M du graphe de f d'abscisse t et note P le point de D d'abscisse t :

L'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{PM}$ est $f(t) - (at+b)$. Son signe détermine la position du graphe de f par rapport à D. On a : $f(t) - (at+b) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\underbrace{\text{donc}}_{\text{cf. la proposition ci-dessous}}$ D est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

Par hypothèse, on a : $f(t) - (at+b) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{c}{t^k}$.

L'ordonnée de $\overrightarrow{PM}$ est du signe de $\frac{c}{t^k}$ quand t est « proche de $+\infty$ », ce qui fournira un schéma.

Proposition

On suppose que $\|M(t)\| \underset{t\to u}{\longrightarrow} +\infty$ (« la courbe M a une branche infinie en u »).

(a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. La courbe M a pour asymptote pour la borne u la droite D d'équation $y = ax + b$ si et seulement si $y(t) - (a\,x(t) + b) \underset{t\to u}{\longrightarrow} 0$.

Dans ce cas, on a : $|x(t)| \underset{t\to u}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to u}{\longrightarrow} a$ (donc $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers la pente de D), et l'étude du signe de $y(t) - (ax(t) + b)$ quand $t \to u$ donne la position par rapport à l'asymptote.

(b) Soit $c \in \mathbb{R}$. La courbe M a pour asymptote pour la borne u la droite D d'équation $x = c$ si et seulement si $x(t) \underset{t\to u}{\longrightarrow} c$.

Dans ce cas : $|y(t)| \underset{t\to u}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{x(t)}{y(t)} \underset{t\to u}{\longrightarrow} 0$ (donc $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers la pente de D, dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$), et l'étude du signe de $x(t) - c$ quand $t \to u$ donne la position par rapport à l'asymptote.

Démonstration

(a) Pour l'équivalence, on utilise un dessin semblable à celui du cas du cas d'un graphe et on remarque que la distance de $M(t)$ à D est le produit de $\left|\cos(\widehat{(Ox), D})\right|$ par $\left\|\overrightarrow{PM}\right\|$.

On suppose maintenant que $y(t) - (a\,x(t) + b) \underset{t \to u}{\longrightarrow} 0$.

On a : $\underbrace{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}_{|x(t) + \mathrm{i}\,y(t)|} \leq |x(t)| + |\underbrace{y(t)}_{a\,x(t) + b + (y(t) - (a\,x(t) + b))}| \leq (1 + |a|)|x(t)| + |b| + |y(t) - (a\,x(t) + b)|$

donc $|x(t)| \geq \frac{1}{1+|a|}\left(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - |b| - |y(t) - (a\,x(t) + b)|\right)$, puis $|x(t)| \underset{t \to u}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi : $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y(t) - (a\,x(t)+b)}{x(t)} + a + \frac{b}{x(t)} \underset{t \to u}{\longrightarrow} a$.

(b) Pour l'équivalence, on remarque que la distance de $M(t)$ à D est $|x(t) - c|$.

On suppose que $x(t) - c \underset{t \to u}{\longrightarrow} 0$.

On a : $\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \leq |x(t)| + |y(t)|$ donc $|y(t)| \geq \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - |x(t)|$, puis $|y(t)| \underset{t \to u}{\longrightarrow} +\infty$.

On en déduit que : $\frac{x(t)}{y(t)} \underset{t \to u}{\longrightarrow} 0$. □

En annexe : les plans d'études de fonctions en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.

Annexe 1 : développements limités usuels

Rappel

Soient $f : \underset{\text{intervalle ouvert}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

On a :
$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n \frac{(x-x_0)^n}{n!} + o((x-x_0)^n)$$
$$\iff f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n \frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

Le calcul d'un DL de f en x_0 commence par le changement de variable $\boxed{x = x_0 + h}$.

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\cosh x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sinh x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \leftarrow \left(\text{intégrer } \tfrac{1}{1+x}\right)$$

$$\arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \qquad \leftarrow \left(\text{intégrer } \tfrac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\operatorname{artanh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \qquad \leftarrow \left(\text{intégrer } \tfrac{1}{1-x^2}\right)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \qquad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}$$

Les développements qui suivent en résultent facilement et ne sont donc pas à apprendre.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2} x + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n + o(x^n) \qquad \leftarrow \left(\alpha = -\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \frac{x^n}{2n} + o(x^n) \qquad \leftarrow \left(\text{intégrer } \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$$

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \qquad \leftarrow \left(\text{intégrer } \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\operatorname{arsinh} x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \leftarrow \left(\text{intégrer } \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \underset{x\to 0}{=} \cdots$$

$\operatorname{arcosh} x$ n'est pas défini quand « x est proche de 0 ».

Annexe 2 : plan d'étude d'une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$

On considère une « courbe paramétrée » $t \mapsto M(t) \left| \begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix} \right.$ où x et y sont dérivables sur $\underbrace{D}_{\subseteq \mathbb{R}}$.

1. Ensemble d'étude

Écrire l'ensemble D comme réunion de $\overbrace{]u,v[\text{ ou } [u,v[\text{ ou }]u,v] \text{ ou } [u,v]}^{\text{les plus grands possibles}}$, $-\infty \leq u < v \leq +\infty$.

Restreindre l'étude à l'aide de la périodicité de M, ou, de la parité de x et y.

(Cas de la parité : $M(-t)$ se déduira de $M(t)$ par symétrie par rapport à O, à (Ox), à (Oy).)

2. Tableau de variations

Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$.

t	
x'	
x	
y	
y'	

La pente de la tangente en $M(t)$ est : $m(t) := \frac{y'(t)}{x'(t)}$ $\left(\text{ou } m(t) := \lim\limits_{\substack{s \to t \\ s \neq t}} \frac{y'(s)}{x'(s)}\right)$.

En option, étudier la concavité : vers le haut quand $x'm' > 0$ et vers le bas quand $x'm' < 0$.

On détectera un point d'inflexion lorsque $x'(t_0) \neq 0$ et $m'(t)$ change de signe en t_0.

3. Études locales ponctuelles

Exhiber les t_0 tels que $M'(t_0) = 0$ « points stationnaires (ou non-réguliers) ».

Éventuellement, quand la concavité n'a pas été étudiée, trouver aussi les t_0 tels que : $M'(t_0) \neq 0$ et $M''(t_0)$ est multiple de $M'(t_0)$.

Dans ces deux cas, à moins que le tableau de variations ne permette de conclure, étudier la nature du point $M(t_0)$ à l'aide d'un développement limité (quitte à utiliser Taylor-Young) : point ordinaire ? point d'inflexion ? point de rebroussement de 1re espèce ? point de rebroussement de 2e espèce ?

En option, chercher les $t_1 \neq t_2$ tels que : $M(t_1) = M(t_2)$ « points multiples ».

4. Études des branches infinies

Soit v^- (ou sinon u^+) une borne de l'ensemble d'étude telle que : $x(t)^2 + y(t)^2 \underset{t \to v^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t \to v^-}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}$ (resp. $a = \infty$) : direction asymptotique $\overrightarrow{D} : y = ax$ (resp. (Oy)).

Dans ce cas :

– si $a = 0$ et $y(t) \underset{t \to v^-}{\longrightarrow} \underbrace{y_0}_{\in \mathbb{R}}$ (resp. ∞) : asymptote $D : y = y_0$ (resp. branche parab. horizontale) ;

– si $a = \infty$ et $x(t) \underset{t \to v^-}{\longrightarrow} \underbrace{x_0}_{\in \mathbb{R}}$ (resp. ∞) : asymptote $D : x = x_0$ (resp. branche parab. verticale) ;

– si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $y(t) - a\,x(t) \underset{t \to v^-}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$ (resp. ∞) : asymptote $D : y = ax + b$ (resp. branche parabolique de direction $\overrightarrow{D} : y = ax$).

En option : préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote en étudiant un signe.

5. Tracé

On trace la courbe, en utilisant éventuellement un tableau de valeurs.

Annexe 3 : étude d'une courbe en coordonnées polaires

On considère une courbe paramétrée du type $\theta \mapsto M(\theta) \left| \begin{array}{l} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{array} \right.$ où r est dérivable.

On pose : $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $v_\theta = u_{\theta+\frac{\pi}{2}}$. D'où : $\overrightarrow{OM(\theta)} = r(\theta)\, u_\theta$.

Quand $r(\theta) > 0$: le point $M(\theta)$ a pour coordonnées polaire $r(\theta)$ et θ, donc $r(\theta)$ est la distance de $M(\theta)$ à l'origine et θ est une mesure de l'angle entre les demi-droites $[Ox)$ et $[OM)$.

1. Ensemble d'étude

Écrire l'ensemble de définition comme réunion d'intervalles.

Restreindre l'étude, par exemple quand M est périodique, en particulier si $r(\theta+\pi) = -r(\theta)$.

2. Tableau de variations

Calculer $r'(\theta)$ et résoudre l'équation $r(\theta_0) = 0$.

Quand $r(\theta) \neq 0$, la pente de la tangente en $M(\theta)$ dans le repère (O, u_θ, v_θ) est : $\boxed{\tan V = \frac{r}{r'}}$.

θ	
r'	
r	

Étude de la concavité en option : vers O (resp. opposée à O) si $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} + (\frac{1}{r})''\right) > 0$ (resp. < 0).

3. Études locales ponctuelles

• Si $r(\theta_0) = 0$: la tangente en O associée à θ_0 est la droite vectorielle de vecteur directeur u_{θ_0}. De plus, O est pour le paramètre θ_0 un point ordinaire (resp. de rebroussement de 1[re] espèce) quand r s'annule en θ_0 en changeant de signe (resp. sans changer de signe).

• Si $r(\theta) \neq 0$: la mesure modulo π de l'angle entre $\mathrm{Vect}\, u_\theta$ et la tangente en $M(\theta)$, est V. De plus, $M(\theta)$ n'est pas un point stationnaire.

• On a $M(\theta_1) = M(\theta_2)$ si et seulement si :

$r(\theta_2) = r(\theta_1) = 0$ ou $\big(r(\theta_2) = r(\theta_1)$ et $\theta_2 \equiv \theta_1\ [2\pi]\big)$ ou $\big(r(\theta_2) = -r(\theta_1)$ et $\theta_2 \equiv \theta_1 + \pi\ [2\pi]\big)$.

4. Études des branches infinies

On se place en une borne θ_0^- (ou sinon θ_0^+) de l'ensemble d'étude.

• Si $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et $r(\theta) \underset{\theta\to\theta_0^-}{\longrightarrow} \infty$: direction asymptotique $(OX) = \mathrm{Vect}(u_{\theta_0})$.

Dans ce cas, on introduit l'ordonnée $Y(\theta) := r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$ de $M(\theta)$ dans le repère $(O, u_{\theta_0}, v_{\theta_0})$: lorsque $Y(\theta) \underset{\theta\to\theta_0^-}{\longrightarrow} Y_0 \in \mathbb{R}$ (resp. ∞), en se plaçant dans le repère $(O, u_{\theta_0}, v_{\theta_0})$, on a une asymptote d'équation $Y = Y_0$ (resp. une branche parabolique de direction (OX)).

En option, préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote en étudiant un signe.

• Spirales (ici $\theta_0^- = +\infty$) :

– si $r(\theta) \underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$: branche infinie en spirale ;

– si $r(\theta) \underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow} r_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: cercle asymptote de centre O et rayon $|r_0|$;

– si $r(\theta) \underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: point asymptote en spirale.

5. Tracé

On trace la courbe, en utilisant éventuellement un tableau de valeurs.
Attention au signe de $r(\theta)$!

Ch. 4. Équations différentielles

Plan
I. Équations différentielles d'ordre 1
II. Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Dans tout ce chapitre, on note : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

I. Équations différentielles d'ordre 1

1. Généralités

Définition

(a) Une *équation différentielle d'ordre* n est une équation, d'inconnue $y : \underset{\substack{\text{intervalle ouvert}\\ \text{non-vide}}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ n-fois dérivable (où I dépend de y), de la forme

$$(E) : \quad y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \ \text{ pour tout } x \in I,$$

avec $f : \underset{\text{partie de } \mathbb{R}^{n+1}}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Une *équation différentielle linéaire d'ordre* n sur un intervalle ouvert non-vide I est une équation, d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$ n-fois dérivable, de la forme

$$(L) : \quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)\, y(x) = b(x) \ \text{ pour tout } x \in I,$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$.

Dans ce cas, *l'équation différentielle linéaire homogène associée* à (L) est

$$(H) : \quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)\, y(x) = 0 \ \text{ pour tout } x \in I.$$

Théorème (« théorème de Cauchy-Lipschitz », hors programme)

Soient $f : \underset{\text{partie de } \mathbb{R}^2}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$.

On suppose qu'il existe des applications $a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_q : \underset{\text{intervalle ouvert}}{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b_1, \dots, b_p, d_1, \dots, d_q : \underset{\text{intervalle ouvert}}{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$U = J \times K \ \text{ et } \ f(x,y) = \frac{a_1(x)\, b_1(y) + \cdots + a_p(x)\, b_p(y)}{c_1(x)\, d_1(y) + \cdots + c_q(x)\, d_q(y)} \ \text{ pour } (x,y) \in J \times K.$$

L'équation différentielle $(E) : y' = f(x,y)$ a une unique solution $y : \underset{\substack{\text{intervalle ouvert}\\ \text{contenant } x_0}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $y(x_0) = y_0$ et telle que toute autre solution $\widetilde{y}$ de (E) vérifiant $\widetilde{y}(x_0) = y_0$ s'écrit $\widetilde{y} : \begin{array}{l} \widetilde{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y(x) \end{array}$ pour un certain intervalle ouvert $\widetilde{I}$ contenant x_0 inclus dans I.

Cette solution y s'appelle *la solution maximale de* (E) *vérifiant* $y(x_0) = y_0$.

Démonstration (cas local avec $p = q = 1$)

On se contente de montrer l'existence locale d'une solution dans le cas particulier d'une équation à variables séparées : $f(x,y) = a(x)\, b(y)$ avec $a : J \to \mathbb{R}$ et $b : K \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

Si $b(y_0) = 0$, l'application $y : \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y_0 \end{array}$ est une solution de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$.

On suppose maintenant que $b(y_0) \neq 0$. Quitte à diminuer K, on peut supposer que $b(y) \neq 0$ pour tout $y \in K$. On pose : $A(x) = \int_{x_0}^x a(t)\, \mathrm{d}t$ pour $x \in J$ et $C(y) = \int_{y_0}^y \frac{\mathrm{d}t}{b(t)}$ pour $y \in K$. L'application C est strictement monotone sur K, puis se révèle bijective quand on choisit son ensemble d'arrivée égal à l'intervalle ouvert $L := C(K)$ qui contient 0.

Pour toute $y : \underset{\text{intervalle ouvert contenant } x_0}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, on a :

$y' = f(x,y)$ et $y(x_0) = y_0 \iff \forall x \in I \quad \big(y(x) \in J$ et $C'(y(x))\,y'(x) = A'(x)\big)$ et $y(x_0) = y_0$
$\iff \forall x \in I \quad A(x) \in L$ et $y(x) = C^{-1}(A(x))$.
Il existe donc une solution y sur un certain intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ inclus dans $A^{-1}(L)$. $\square$

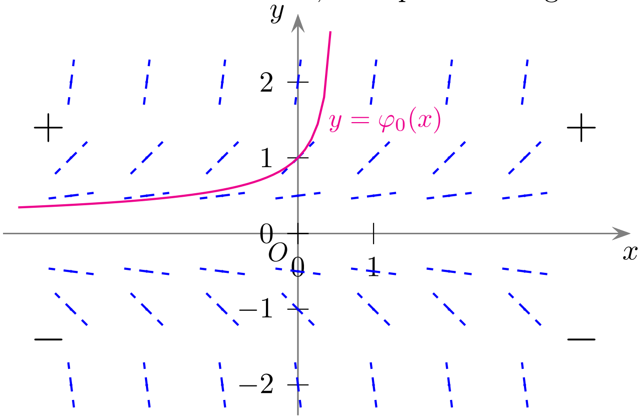
Exemple (hors programme)

On étudie l'équation différentielle $(E) : y' = y^3$, qui est associée à $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^3$.

(1) Interprétation géométrique du théorème ?

Les solutions de (E) sont les applications $\varphi : \underset{\text{intervalle ouvert} \neq \emptyset}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables dont le graphe Γ a pour vecteur tangent $(1, f(x,y))$ en chaque point $(x,y) \in \Gamma$.

Cela montre l'utilité de tracer « l'isocline zéro » d'équation $f(x,y) = 0$, d'indiquer le signe de f en dehors de cette isocline zéro, et de placer un segment de pente $f(x,y)$ en certains (x,y) :



isocline zéro : (Ox)

Question : la solution maximale φ_0 de (E) vérifiant $\varphi_0(0) = 1$ a-t-elle une asymptote verticale, et dans ce cas laquelle ?

Le théorème de Cauchy-Lipschitz exprime que les graphes des solutions maximales de (E) recouvrent $\mathbb{R}^2$ sans se couper. En effet, si $\varphi : \underset{\text{intervalle ouvert} \neq \emptyset}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \underset{\text{intervalle ouvert} \neq \emptyset}{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux solutions maximales de (E) vérifiant $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ pour un $x_0 \in I \cap J$, $\underbrace{\text{alors}}_{\text{avec } y_0 := \varphi(x_0)}$ $\varphi = \psi$.

(2) Résolution de (E) ?

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On cherche la solution maximale de $(E) : y' = y^3$ vérifiant $y(x_0) = y_0$.
Idée : diviser par y^3 après avoir écarté les solutions qui s'annulent en au moins un point.

<u>1^er^ cas</u> : $y_0 = 0$
L'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$ vérifie (E) avec $\varphi(x_0) = 0$.
Il s'agit donc de la solution maximale y de (E) vérifiant $y(x_0) = 0$.

<u>2^e^ cas</u> : $y_0 \neq 0$

Vu le premier cas, le graphe de la solution maximale y de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$ ne coupe pas celui de la fonction nulle, ce qui signifie que cette solution y ne s'annule pas. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle restera du signe de y_0.

Pour toute $y : \underset{\text{intervalle ouvert} \neq \emptyset}{I} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dérivable, on a (en omettant les « $\forall x \in I$ ») :

$$(E) \iff \frac{y'}{y^3} = 1 \iff \int \frac{y'(x)}{y(x)^3}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x \overset{\text{CV } \boldsymbol{y} = y(x)}{\iff} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^3} = \int \mathrm{d}x \iff -\frac{1}{2y^2} = x + \text{cte}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} y' = y^3 \text{ et } y(x_0) = y_0 &\iff \forall x \in I \quad -\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2y_0^2} = x - x_0 \text{ et } y(x_0) = y_0 \\ &\iff \forall x \in I \quad \left(1 - 2y_0^2(x - x_0) > 0 \text{ et } y^2 = \frac{y_0^2}{1 - 2y_0^2(x - x_0)}\right) \text{ et } y(x_0) = y_0 \\ &\iff I \subseteq \left]-\infty, x_0 + \frac{1}{2y_0^2}\right[\text{ et } \forall x \in I \quad y(x) = \frac{y_0}{\sqrt{1 - 2y_0^2(x - x_0)}}. \end{aligned}$$

La solution maximale de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$ est donc :

$$y : \begin{array}{ccc} \left]-\infty, x_0 + \frac{1}{2y_0^2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{y_0}{\sqrt{1-2y_0^2(x-x_0)}} \end{array}.$$

En particulier, la solution φ_0 du (1) est : $\varphi_0 : \begin{array}{ccc} \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \end{array}$.

2. Cas linéaire

Théorème (« théorème de Cauchy », hors programme quand $n \geq 2$)

Soient $a_0, ..., a_{n-1}, b : \underset{\text{intervalle ouvert} \neq \emptyset}{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ des applications continues, $x_0 \in I$ et $y_0, ..., y_{n-1} \in \mathbb{K}$.

L'équation différentielle linéaire $(L) : y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = b(x)$ a une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ vérifiant $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Démonstration (cas $n = 1$)

On résout ici l'équation différentielle $(\star)$ $y' + a_0(x)\, y = b(x)$ et $y(x_0) = y_0$.

On pose, dans $\mathbb{C}$: $A_0(x) = \int_{x_0}^{x} a_0(t)\, \mathrm{d}t$ et $\lambda(x) = \mathrm{e}^{A_0(x)}\, y(x)$ pour tout $x \in I$.

Or, on dispose encore des égalités $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\mathrm{e}^w)' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, w}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, w}\right)' = w'\mathrm{e}^w$ quand u, v et w sont des applications dérivables d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$.

On a donc : $y(x) = \lambda(x)\, \mathrm{e}^{-A_0(x)}$ et $y'(x) = \lambda'(x)\, \mathrm{e}^{-A_0(x)} - \lambda(x)\, a_0(x)\, \mathrm{e}^{-A_0(x)}$.

Ainsi : $(\star) \iff \lambda'(x) = b(x)\, \mathrm{e}^{A_0(x)}$ et $\lambda(x_0) = y_0 \iff \lambda(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)\, \mathrm{e}^{A_0(t)}\, \mathrm{d}t + y_0$.

L'équation $(\star)$ a pour unique solution $y : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \left(\int_{x_0}^{x} b(t)\, \mathrm{e}^{A_0(t)}\, \mathrm{d}t + y_0\right) \mathrm{e}^{-A_0(x)} \end{array}$. □

Corollaire

Soient $a_0, ..., a_{n-1}, b, b_1, ..., b_p : \underset{\text{intervalle ouvert} \neq \emptyset}{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ des applications continues et $x_0 \in I$.

(a) L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions $y : I \to \mathbb{K}$ de $(H) : y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = 0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

De plus, des solutions φ_1, ..., φ_n de (H) forment une base de $\mathscr{S}_H$ si et seulement si les vecteurs $\begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$, ..., $\begin{pmatrix} \varphi_n(x_0) \\ \varphi_n'(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{K}^n$.

(b) L'ensemble $\mathscr{S}_L$ des solutions $y : I \to \mathbb{K}$ de $(L) : y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x)$ s'écrit $\boxed{\mathscr{S}_L = \mathscr{S}_H + y_P}$, où $y_P : I \to \mathbb{K}$ est une solution particulière de (L) (il en existe).

Cela signifie que les solutions de (L) sont les fonctions $y := y_H + y_P$ avec y_H qui décrit $\mathscr{S}_H$.

(c) Si $b = \sum_{k=1}^{p} \underset{\mathbb{K}}{\underset{\cap}{\beta_k}}\, b_k$ et $\left| \begin{array}{l} y_1 \text{ vérifie } (L_1) : y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = b_1(x) \\ (\cdots) \\ y_P \text{ vérifie } (L_p) : y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = b_p(x) \end{array} \right.$

alors $y := \sum_{k=1}^{p} \beta_k\, y_k$ vérifie $(L) : y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = b(x)$.

Ce résultat immédiat s'appelle le « principe de superposition ».

Démonstration

(a) Il est immédiat que $\mathscr{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

On introduit l'application $l : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_H & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \varphi & \longmapsto & \left(\varphi(x_0), \varphi'(x_0) ..., \varphi^{(n-1)}(x_0)\right) \end{array}$.

Elle est clairement linéaire. D'après le théorème de Cauchy, elle est bijective.

Ainsi, l est un isomorphisme de $\mathscr{S}_H$ sur $\mathbb{K}^n$. Or $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Donc $\mathscr{S}_H$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{S}_H = n$.

En outre, des vecteurs $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathscr{S}_H$ forment une base de $\mathscr{S}_H$ si et seulement si les vecteurs $l(\varphi_1), ..., l(\varphi_n)$ forment une base de $\mathbb{K}^n$. D'où le résultat.

(b) Soit $y_P : I \to \mathbb{K}$ une solution de (L), par exemple l'unique solution $\widetilde{y}$ de (L) vérifiant $\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{y}'(x_0) = ... = \widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$ que fournit le théorème de Cauchy.

On a : $y_P^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y_P^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y_P = b(x)$. Donc :

$$\begin{aligned}(L) &\iff y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y \;=\; y_P^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y_P^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y_P \\ &\iff (y - y_P)^{(n)} + a_{n-1}(x)\,(y-y_P)^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\,(y - y_P) \;=\; 0 \\ &\iff y - y_P \in \mathscr{S}_H \\ &\iff \exists\, y_H \in \mathscr{S}_H \quad y = y_H + y_P.\end{aligned}$$

Cela permet de conclure

(c) On obtient l'égalité (L) en additionnant chaque produit de β_k avec l'égalité (L_k). □

Remarque

Soient $a_0, ..., a_n, b : \underset{\text{intervalle ouvert} \neq \emptyset}{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ des applications continues. On obtient facilement :
– l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions sur I de $(H) : a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$;
– quand $y_P : I \to \mathbb{K}$ est une solution de $(L) : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x)$, l'ensemble $\mathscr{S}_L$ des solutions sur I de (L) s'écrit $\mathscr{S}_L = \mathscr{S}_H + y_P$.

Mais pour $a_0 = ... = a_n = 0$ et $b = 1$, on a : $\mathscr{S}_H = \mathbb{K}^I$ (pas de dimension finie) et $\mathscr{S}_L = \emptyset$.

Proposition

Soient $a, b : \underset{\text{intervalle ouvert} \neq \emptyset}{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ des applications continues.

(a) Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, l'équation différentielle $(L) : y' + a(x)\, y = b(x)$ a une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ vérifiant $y(x_0) = y_0$.

(b) Il existe – et on fixe – une solution non-nulle $\varphi : I \to \mathbb{K}$ de $(H) : y' + a(x)\, y = 0$.
Les solutions de (H) sont les $\lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{K}$

(c) Toute solution de (L) s'écrit $\lambda\varphi$ pour un certain $\lambda : I \to \mathbb{K}$ dérivable.
« Méthode de variation de la constante » : on cherche une solution y_P de (L) de cette forme.

Démonstration

(a) (b) C'est le cas particulier $n = 1$ du théorème de Cauchy et de son corollaire (a).

(c) Soit $x_0 \in I$. D'après (a), on a $\varphi(x_0) \neq 0$.
Par conséquent, l'application $\lambda := \frac{y}{\varphi}$ convient. □

Cas particulier

Soient $a \in \mathbb{K}$ et I un intervalle ouvert $\neq \emptyset$. On rappelle que $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{ax}) = a\, \mathrm{e}^{ax}}$ quand $x \in \mathbb{R}$.

Les solutions $y : I \to \mathbb{K}$ de $(H) : y' = ay$ sont les applications $y : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{ax} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire réelle $(L) : y' = \frac{2y}{x} + 1$ pour $x > 0$.

• On résout d'abord l'équation homogène $(H) : y' = \frac{2y}{x}$ pour $x > 0$.

Le corollaire (a) montre que toute solution non-nulle y de (H) ne s'annule pas, donc garde un signe constant. Pour toute $y : \;]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dérivable, on a :
$(H) \iff \int \frac{y'(x)}{y(x)}\, \mathrm{d}x = 2 \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \iff \ln|y(x)| = \ln(x^2) + \text{cte} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \;\; \forall x > 0 \;\; y(x) = \lambda\, x^2$.
[Variante : $(H) \iff \forall x > 0 \quad \int_1^x \frac{y'(t)}{y(t)}\, \mathrm{d}t = 2 \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \overset{y(x) \text{ a le signe de } y(1)}{\iff} \forall x > 0 \quad y(x) = y(1)\, x^2$]

Les solutions de (H) sont donc les applications $y : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda\, x^2 \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• On cherche une solution particulière de (L) par « variation de la constante ».

Soit $\lambda :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On pose $y(x) = \lambda(x)\,x^2$, donc $y'(x) = \lambda'(x)\,x^2 + 2\,\lambda(x)\,x$.
Dans cette situation, on a : $(L) \iff \lambda'(x) = \frac{1}{x^2} \iff \lambda(x) = -\frac{1}{x} + \text{cte}$.

En choisissant $\lambda(x) = -\frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, on obtient la solution $y_P : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$.

• Conclusion : les solutions de (L) sont les applications $y : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda\,x^2 - x \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 2

1. Coefficients quelconques

Proposition (hors programme quand (a, b) est non-constant)

Soient $a, b, c : \underset{\text{intervalle ouvert} \neq \emptyset}{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ des applications continues.

(a) Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, l'équation différentielle $(L) : y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$ a une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

(b) Il existe deux solutions non-colinéaires $\varphi, \psi : I \to \mathbb{K}$ de $(H) : y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$.
Les solutions de (H) sont les $\lambda\,\varphi + \mu\,\psi$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(c) Toute solution de (L) s'écrit $\lambda\,\varphi + \mu\,\psi$ avec $\lambda, \mu : I \to \mathbb{K}$ dérivables et $\lambda'\,\varphi + \mu'\,\psi = 0$.
« Méthode de variation des constantes » : on cherche une solution y_P de (L) de cette forme.
[Lorsqu'on dispose d'une solution φ de (H) qui ne s'annule pas, il est aussi possible de chercher une solution de (L) de la forme $\lambda\,\varphi$ pour un certain $\lambda : I \to \mathbb{K}$ dérivable.]

Démonstration

(a) (b) C'est le cas particulier $n = 2$ du théorème de Cauchy et de son corollaire (a).

Dans le cas des coefficients a et b constants, la démonstration du (b) et la démonstration du (a) pour certaines fonctions c seront donnés au paragraphe suivant.

(c) Soient $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle avec condition initiale

$$(L_0) : \quad y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x) \ \text{ et } \ \big(y(x_0), y'(x_0)\big) = (y_0, y_1).$$

On vérifie que l'unique solution de (L_0) a la forme proposée.

Soient $\lambda, \mu : I \to \mathbb{K}$ dérivables [1 fois]. On pose : $y = \lambda\,\varphi + \mu\,\psi$ et étudie (L_0) pour ce y.

On va utiliser les propriétés suivantes de φ et ψ :

– $\varphi'' + a(x)\,\varphi' + b(x)\,\varphi = 0$ et $\psi'' + a(x)\,\psi' + b(x)\,\psi = 0$, car φ et ψ vérifient (H) ;
– $\varphi(x)\,\psi'(x) - \varphi'(x)\,\psi(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, car $\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \varphi'(x)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\psi(x)\\ \psi'(x)\end{pmatrix}$ sont non-colinéaires.

Si $\lambda'\,\varphi + \mu'\,\psi = 0$, alors $y' = \lambda\,\varphi' + \mu\,\psi'$ et $y'' = \lambda'\,\varphi' + \mu'\,\psi' + \lambda\,\varphi'' + \mu\,\psi''$. D'où :

$$\begin{cases} \lambda'\,\varphi + \mu'\,\psi = 0 \\ (L_0) \end{cases} \iff \lambda'\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix} + \mu'\begin{pmatrix}\psi\\ \psi'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix} \ \text{ et } \ \lambda(x_0)\begin{pmatrix}\varphi(x_0)\\ \varphi'(x_0)\end{pmatrix} + \mu(x_0)\begin{pmatrix}\psi(x_0)\\ \psi'(x_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_0\\ y_1\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{par unicité on se contente de}\\ \text{vérifier que cela convient}}}{\iff} \begin{cases} \lambda' = \frac{-c\,\psi}{\varphi\,\psi' - \varphi'\,\psi} \ \text{ et } \ \lambda(x_0) = \frac{y_0\,\psi'(x_0) - y_1\,\psi(x_0)}{\varphi(x_0)\,\psi'(x_0) - \varphi'(x_0)\,\psi(x_0)} \\ \mu' = \frac{c\,\varphi}{\varphi\,\psi' - \varphi'\,\psi} \ \text{ et } \ \mu(x_0) = \frac{y_1\,\varphi(x_0) - y_0\,\varphi'(x_0)}{\varphi(x_0)\,\psi'(x_0) - \varphi'(x_0)\,\psi(x_0)} \end{cases}.$$

Une intégration de fonctions continues permet d'obtenir un couple (λ, μ) qui convient. □

2. Coefficients constants

Définition

Soient I un intervalle ouvert non-vide et $a, b \in \mathbb{K}$.

L'*équation caractéristique* associée à l'équation différentielle $(H) : y'' + ay' + by = 0$ sur I est l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.
[Il s'agit de la condition nécessaire et suffisante pour que $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ soit solution de (H) sur $\mathbb{C}$.]

Proposition

Soient I un intervalle ouvert non-vide et $a, b \in \mathbb{K}$.

On s'intéresse à l'équation différentielle $(H) : y'' + ay' + by = 0$ d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$. On note r_1 et r_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de son équation caractéristique.

(a) On obtient une base (φ, ψ) de l'espace des solutions de (H) en posant, pour $x \in I$

– si $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$: $\varphi(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{r_2 x} & \text{si } r_2 \neq r_1 \\ \text{ou } x\mathrm{e}^{r_1 x} & \text{si } r_2 = r_1 \end{cases}$.

– sinon : $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $\psi(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$ où $r_1 = \underset{\underset{\mathbb{R}}{\Cap}}{\alpha} + \mathrm{i}\underset{\underset{\mathbb{R}}{\Cap}}{\beta}$ et $r_2 = \overline{r_1}$ (car $a, b \in \mathbb{K} \overset{\text{ici}}{=} \mathbb{R}$).

(b) Soient $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ de degré d et $\gamma \in \mathbb{C}$.

L'équation différentielle $(L) : y'' + ay' + by = P(x)\,\mathrm{e}^{\gamma x}$ a une solution $\underset{\text{(unique)}}{y_P : I \to \mathbb{C}}$ de la forme $y_P : x \mapsto Q(x)x^m\,\mathrm{e}^{\gamma x}$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$ de degré d et $m = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \notin \{r_1, r_2\} \\ \text{ou } 1 & \text{si } \gamma \in \{r_1, r_2\} \text{ et } r_1 \neq r_2 \\ \text{ou } 2 & \text{si } \gamma = r_1 = r_2 \end{cases}$.

Démonstration (indépendante du résultat général admis)

(a) On se place d'abord dans le cas où $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$. On introduit φ et ψ comme dans l'énoncé. Il est clair que ce sont des solutions de (H) (cela a déjà été remarqué quand $r_1 \neq r_2$).

Soit $x_0 \in I$. On a : $\varphi(x_0)\,\psi'(x_0) - \varphi'(x_0)\,\psi(x_0) = \begin{cases} (r_2 - r_1)\,\mathrm{e}^{(r_1+r_2)x_0} & \text{si } r_2 \neq r_1 \\ \text{ou } \mathrm{e}^{2r_1 x_0} & \text{si } r_2 = r_1 \end{cases} \neq 0$.
Donc φ et ψ sont non-colinéaires.

On effectue le changement de variable $z := \mathrm{e}^{-r_1 x}y$ (donc z est deux fois dérivable sur I)
On a : $y = \mathrm{e}^{r_1 x}z$, $y' = r_1\mathrm{e}^{r_1 x}z + \mathrm{e}^{r_1 x}z'$, $y'' = r_1^2\mathrm{e}^{r_1 x}z + 2r_1\mathrm{e}^{r_1 x}z' + \mathrm{e}^{r_1 x}z''$.
Ainsi, comme $2r_1 + a = r_1 - r_2$: $(H) \iff (z')' = (r_2 - r_1)z'$.
Si $r_1 \neq r_2$: $(H) \iff \exists \mu_0 \in \mathbb{K} \quad z' = \mu_0\,\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad y = \mu\psi + \lambda\varphi$.
Si $r_1 = r_2$: $(H) \iff z'' = 0 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad z = \mu x + \lambda \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad y = \mu\psi + \lambda\varphi$.

Pour terminer, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et que les racines r_1 et r_2 du polynôme réel $X^2 + a\,X + b$ sont non-réelles, donc de la forme $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, $\varphi_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $\varphi_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$ sont des solutions de (H) à valeurs dans $\mathbb{C}$ non-colinéaires sur $\mathbb{C}$. Donc les parties réelle $\varphi := \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ et imaginaire $\psi := \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\mathrm{i}}$ de φ_1 sont des solutions de (H) à valeurs dans $\mathbb{R}$ non-colinéaires sur $\mathbb{R}$ (car $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\varphi, \psi)$), qui engendrent l'espace des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ (car une solution réelle y de (H) sur $\mathbb{R}$ est solution de (H) sur $\mathbb{C}$, donc $y \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\varphi_1, \varphi_2)$ puis $y = \mathrm{Re}\,y \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Re}\,\varphi_1, \mathrm{Re}\,\varphi_2)$).

b) Soient $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ de degré d et $\gamma \in \mathbb{C}$. Cas général de l'ordre n (ici $n = 2$) :

$$(L) \colon y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = P(x)\,\mathrm{e}^{\gamma x} \quad \text{d'inconnue } y : I \to \mathbb{C}..$$

Soit $U \in \mathbb{C}[X]$. On pose $y(x) := U(x)\,\mathrm{e}^{\gamma x}$. Leibniz : $y^{(p)} = \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^p)\Big|_{x=\gamma} U^{(k)}(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$.
On en déduit que : $(L) \iff \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C^{(k)}(\gamma)}{k!}U^{(k)}(x) = P(x)$.

On suppose U non-nul de degré $m + j$. On a : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C^{(k)}(\gamma)}{k!}U^{(k)}$ est non-nul de degré j.

On en déduit que l'application linéaire $l \colon \begin{array}{ccc} X^m\,\mathbb{C}_d[X] & \to & \mathbb{C}_d[X] \\ U & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C^{(k)}(\gamma)}{k!}U^{(k)} \end{array}$ est injective.

Il en résulte, grâce au théorème de la dimension, que l est surjective. D'où le résultat. □

Variante

On note : $\left|\begin{array}{l} C = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \text{ et } m \text{ la multiplicité de } \gamma \text{ dans } C\,; \\ f \colon y \in \mathscr{C}^\infty(I) \mapsto y' \in \mathscr{C}^\infty(I) \text{ et } i \colon U \in \mathbb{C}[X] \mapsto \big(x \mapsto U(x)\,\mathrm{e}^{\gamma x}\big) \in \mathscr{C}^\infty(I)\,; \\ \widetilde{f} \colon U \in \mathbb{C}[X] \mapsto U' + \gamma U \in \mathbb{C}[X]. \end{array}\right.$

Soit $U \in \mathbb{C}[X]$. On pose $y(x) := U(x)\,\mathrm{e}^{\gamma x}$. On a : $f(i(U)) = i(\widetilde{f}(U))$. Par injectivité de i :
$(L) \iff C(f)(i(U)) = i(P) \iff i(C(\widetilde{f})(U)) = i(P) \iff C(\widetilde{f})(U) = P$.

Il reste à démontrer que $C(\widetilde{f})(X^m\,\mathbb{C}_d[X]) = \mathbb{C}_d[X]$. On pose pour cela :
$C = \prod_{k=1}^{q}(X-r_k)^{\alpha_k}$ avec $\underbrace{\{r_1,\dots,r_q\}}_{\text{distincts}} \subseteq \mathbb{C}$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, donc $C(\widetilde{f}) = \prod_{k=1}^{q}(\widetilde{f}-r_k\,\mathrm{id})^{\alpha_k}$.

On a : $\deg((\widetilde{f}-r\,\mathrm{id})(X^{n+1})) = n$ pour $n \in \mathbb{N}$, donc $X^m\mathbb{C}_d[X] \overset{(\widetilde{f}-r\,\mathrm{id})^m}{\to} \mathbb{C}_d[X]$ est bijective.
Si $r_k \neq r$: $\deg((\widetilde{f}-r_k\,\mathrm{id})(X^n)) = n$ pour $n \in \mathbb{N}$, donc $\mathbb{C}_d[X] \overset{(\widetilde{f}-r_k\,\mathrm{id})^{\alpha_k}}{\to} \mathbb{C}_d[X]$ est bijective.
En appliquant d'abord $(\widetilde{f}-r\,\mathrm{id})^m$, on en déduit que $X^m\,\mathbb{C}_d[X] \overset{C(\widetilde{f})}{\to} \mathbb{C}_d[X]$ est bijective.

Exemple

On considère $(L) : y'' - y = \mathrm{e}^x$, où y est définie sur $I = \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

• Solutions de l'équation homogène $(H) : y'' - y = 0$?
Équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0$. À l'ordre près, ses solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$.
Les solutions de (H) sont donc les applications $y : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^x + \mu\,\mathrm{e}^{-x}\end{array}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

• Solution particulière de (L) ?
<u>Méthode 1</u> : variation des constantes (méthode hors programme et déconseillée ici)
Soient $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables. En posant $y(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^x + \mu(x)\,\mathrm{e}^{-x}$, on a :
$$\begin{cases} y'' - y = \mathrm{e}^x \\ \lambda'(x)\,\mathrm{e}^x + \mu'(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda'(x)\,\mathrm{e}^x - \mu'(x)\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x \\ \lambda'(x)\,\mathrm{e}^x + \mu'(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda(x) = \frac{x}{2} + \mathrm{cte} \\ \mu(x) = -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + \mathrm{cte} \end{cases}.$$
Par exemple, avec les constantes nulles : $y_P : x \mapsto \frac{x}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^x$ est une solution de (L).
<u>Méthode 2</u> : solution de la forme $Q(x)\,x^m\,\mathrm{e}^{\gamma x}$ (méthode conseillée ici)
Ici $P = 1$ avec $d = 0$, et, $\gamma = 1$ avec $m = 1$. En posant $y(x) = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\alpha}}\,x\,\mathrm{e}^x$, on a :
$y'' - y = \mathrm{e}^x \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad 2\alpha\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$.
On choisit donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et obtient la solution $y_P : x \mapsto \frac{x}{2}\mathrm{e}^x$ de (L).

• Les solutions de (L) sont les applications $y : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^x + \mu\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x}{2}\mathrm{e}^x\end{array}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.