1M002 ; Partiel du 15 mars.

Durée 2h. Sur 25 points

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **6** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 7 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 4 points ; exercice 6 : 5 points. Le total est de 30 points et la note sera ramenée sur **25**.

Exercice 1. Vrai ou faux ? Veuillez justifier votre réponse.

1. La suite $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.
2. La suite $(\sqrt{n+\sin(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.
3. Pour toute matrice carrée $A \in M_3(\mathbb{R})$ on a $\text{dét}(2A) = 2\,\text{dét}\,A$.
4. Si une matrice carrée $A \in M_2(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 = I_2$ alors elle est inversible.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour $n \geqslant 4$.
2. Montrer que si P et M sont deux matrices dans $M_3(\mathbb{C})$ avec P inversible, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(PMP^{-1})^n = PM^nP^{-1}$.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}.
4. Calculer $B = PAP^{-1}$.
5. Calculer B^2. Déterminer B^n sans faire de calcul pour $n \geqslant 3$.

Exercice 3. Soit a un nombre réel. On considère le système suivant en les variables x, y, z :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ x & + & y & + & 2z & = & a \end{array}\right.$$

1. A quelle(s) condition(s) sur a le système a-t-il des solutions ?
2. Dans ce(s) cas, décrire l'ensemble des solutions du système.

Exercice 4. Soit $f :]-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2-x}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0, \frac{3}{2}]$ est stable par f et que f est contractante sur cet intervalle.
2. Déterminer les points fixes de f dans l'intervalle $[0, \frac{3}{2}]$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0,2]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_1 \in [0, \frac{3}{2}]$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5. Soit $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ huit nombres complexes et considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_2 & = & a_1x_1 + b_1 \\ x_3 & = & a_2x_2 + b_2 \\ x_4 & = & a_3x_3 + b_3 \\ x_1 & = & a_4x_4 + b_4 \end{array}\right.$$

1. Mettre le système sous la forme $AX = B$ où X est le vecteur colonne formé par les inconnues x_1, x_2, x_3, x_4.
2. Calculer le déterminant dét A.
3. Montrer que le système à une unique solution si $a_1a_2a_3a_4 \neq 1$.

Exercice 6. Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction vérifiant pour tous $x, y \in [a,b]$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

Soient $x_0 \in [a,b]$ et x_n défini par $x_{n+1} = \frac{1}{2}(f(x_n) + x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. est bien définie,
2. est monotone
3. et converge vers un point fixe de f.