1M002 ; Examen du 14 juin.

Durée 2h. Sur 25 points

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **7** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4,5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 5,5 points ; exercice 5 : 3 points ; exercice 6 : 5 points ; exercice 7 : 5 points. Le dernier exercice est hors barème.

Exercice 1. Prouver les énoncés suivants.

1. Si $f : E \to E'$ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels alors $\mathrm{rg}(f) = \dim E$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n + (-1)^n n$. Calculer ses dix premiers termes et montrer qu'on peut en extraire une sous-suite convergente.
3. Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tA = -A$ alors dét $A = 0$.
4. On a l'égalité $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}dt = \int_0^{2\pi} e^{-\cos(t)}dt$. On pourra faire le changement de variable $t \mapsto t + \pi$ dans la première intégrale.

Exercice 2. Calculer les primitives des fonctions suivantes sur un intervalle de définition qu'on précisera.

1. $x \arctan(x)$
2. $\dfrac{1}{x \ln x}$ - on pourra poser $u = \ln x$
3. $\dfrac{3}{x^2 - x - 2}$

Exercice 3. Décrire suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les solutions du système suivant.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. Calculer I_0.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Montrer qu'on a l'inégalité $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
4. En déduire la formule $(-1)^n I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \ln 2$.
5. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Existe-t-il $l \in \mathbb{R}$ tel que la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$?
3. Conclure quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z).$$

1. Donner une base de $\ker(f)$.
2. Donner une base de $\operatorname{im}(f)$.
3. Calculer $f \circ f$ en fonction de f.
4. En déduire que $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Exercice 7. Soit a, b, c, λ quatre nombres réels. On considère le système suivant.

$$\begin{cases} ay + bz + ct = \lambda x \\ ax + cz + bt = \lambda y \\ bx + cy + at = \lambda z \\ cx + by + az = \lambda t \end{cases}$$

1. Écrire ce système sous la forme $MX = 0$ où M est une matrice carrée de taille 4 et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.
2. Factoriser $\text{dét}(M)$.
3. Décrire pour quelles valeurs de λ ce système a une solution non nulle.