

Feuille 1

Éléments de logique - Suites Numériques

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Exercice 1 (Logique et théorie des ensembles).

Contredire les assertions suivantes :

(*) Dans toutes les prisons, tous les détenus détestent tous les gardiens.

(**) Pour tout entier naturel x , il existe un entier naturel y tel que pour tout entier naturel z , la relation $z < x + y$ est vérifiée.

L'assertion (**) est-elle exacte ?

Exercice 2 (Logique et théorie des ensembles).

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, ayant une dérivée strictement positive en tout point.

Montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde que f est croissante sur $[a, b]$.

Exercice 3 (Logique et théorie des ensembles).

— Soit F et G deux sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que $F = G$ si et seulement si $F \cup G = F \cap G$.

— Combien d'éléments comporte l'ensemble des parties d'un ensemble E à 4 éléments ?

Exercice 4 (Logique et théorie des ensembles).

1. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \mid p, q \in \mathbb{N}^*, p \neq q \right\}?$$

2. Ces bornes appartiennent-elles à l'ensemble A ?

Exercice 5 (Récurrence).

— Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

$$1. \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}.$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n.$$

— On considère la propriété $P(n)$ dépendant de $n \in \mathbb{N}$: $P(n) : 2^n > n^2$.

1. Les propriétés $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ sont-elles vraies ?

2. Montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 5$.

Exercice 6 (Contraposée).

— Montrer par contraposée la propriété suivante : "Si n^2 est impair alors n est impair".

— Une fonction f est majorée sur \mathbb{R} si : $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

1. Exprimer à l'aide d'une phrase mathématique avec des quantificateurs, que la fonction f n'est pas majorée sur \mathbb{R} .

2. Une fonction f tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ si : $\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists A \in \mathbb{R}^+$ tel que $x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$.

Exprimer à l'aide d'une phrase mathématique avec des quantificateurs, que la fonction f ne tend pas vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3. La propriété 2) est-elle la négation de la propriété 1) ? Donner un exemple pour justifier la réponse.

Exercice 7 ((C) Limites : révisions du premier semestre). Trouver la limite des suites définies par :

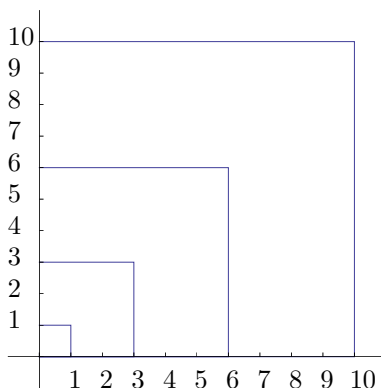
$$1. u_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}}. \quad 2. v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}. \quad 3. w_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 8 ((C) Sommes de suites géométriques). Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en fonction de θ , la valeur des sommes suivantes :

$$1. S_1(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}. \quad 2. S_2(\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{2ik\theta}. \quad 3. \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \quad 4. \sum_{k=0}^3 3i^k.$$

Exercice 9 (Somme d'entiers, de carrés, de cubes). On considère $R_n = \sum_{k=1}^n k$, $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$ et $T_n = \sum_{k=1}^n k^3$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout n , $R_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $T_n = (R_n)^2$.
2. Retrouver le premier résultat en montrant que $2R_n$ est l'aire d'un rectangle de côtés de longueur n et $n+1$. (On interprète k comme l'aire d'un rectangle de côtés de longueur 1 et k , et on joue au puzzle).
3. On considère le carré de côté R_n , et on dessine à l'intérieur les carrés de côtés $1 + \dots + k$ tous en bas à gauche (ils se chevauchent, voir dessin). Calculer de deux manières l'aire de ce carré pour obtenir la dernière égalité de la question 1.



Exercice 10 (Une suite arithmético-géométrique). Trois personnes lancent un réseau social. Le premier jour, chacune des trois fondatrices convainc deux nouvelles personnes de rejoindre le réseau. Ensuite, chaque jour, chaque inscrit convainc deux nouvelles personnes de rejoindre le réseau, sauf les trois fondatrices, trop occupées à maintenir les serveurs. Combien le réseau compte-t-il de membres au bout d'un an (365 jours) ?