1M002 - Rattrapage du 27 juin.

Durée 2h.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **5** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 15 points ; exercice 2 : 9 points ; exercice 3 : 14 points ; exercice 4 : 12 points ; exercice 5 : 8 points. Le total est de 58 points et la note sera ramenée sur **50**.

Exercice 1. Vrai ou faux ? Justifier votre réponse.

1. La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$ et $u_0 \in [0, 1]$ est bornée.
2. Toute suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
3. Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tA = -A$ alors $\text{dét}(A) = 0$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} dx \leqslant e^{\pi/2} - 1$.
5. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ est linéaire.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos x)^2 dx$.
2. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{dx}{x^2 - 1}$.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)dx}{\cos(x)}$.

Exercice 3. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente ; on note ℓ sa limite.
5. À l'aide d'une intégration par parties montrer qu'on a pour tout $n \geq 2$:
$$u_n = \frac{n-1}{n} u_{n-2}.$$
6. Pour tout $n \geq 1$ on pose $v_n = n u_n u_{n-1}$. Montrer que la suite (v_n) est constante. Quelle est sa valeur ?
7. En considérant la suite $\left(\dfrac{v_n}{n}\right)$, déterminer la valeur de ℓ.

8. Montrer que $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. *Indication : commencer par étudier le comportement de* $\dfrac{u_n}{u_{n-2}}$ *quand* n *tend vers l'infini, puis utiliser le fait que la suite* (u_n) *est positive et décroissante.*
9. Montrer à l'aide des questions précédentes que la suite (nu_n^2) converge et donner sa limite.

Exercice 4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Calculer les valeurs propres (réelles ou complexes) de A.
3. Montrer que toute suite numérique (u_n) vérifiant l'équation $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifie aussi
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$
4. En déduire qu'une telle suite est nécessairement périodique.

Exercice 5. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et M la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de a, b, c la matrice M est inversible.
2. Dans les cas où M est inversible, calculer M^{-1}.