UPMC
D. Bertrand

Licence L3 de mathématiques 12-13
LM 323 - Géométrie affine et euclidienne

Examen du 12 juin 2013
Durée: 2 heures

Les documents, calculatrices, portables ... ne sont pas autorisés.
Les 4 énoncés sont indépendants (et de valeurs sensiblement égales).
Les réponses devront être justifiées (sauf pour la question de cours).

I

1°/ (**Question de cours**) On se place dans un espace vectoriel euclidien E, de dimension finie $n \geq 1$.

i) Soit u une isométrie vectorielle de E. Rappeler sous quelle forme on peut mettre la matrice de u dans une base orthonormée convenablement choisie.

ii) On suppose que $n = 3$. Décrire les isométries vectorielles u qui possèdent un vecteur v non nul vérifiant $u(v) = v$? Même question pour celles qui possèdent un vecteur v non nul vérifiant $u(v) = -v$.

2°/ Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien et A, B, C, D quatre points de $\mathcal{E}$. On suppose que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \neq 0$. On note respectivement r_A, r_B, r_C, r_D les symétries centrales par rapport aux points A, B, C, D.

i) Décrire l'isométrie affine $r_B \circ r_A$.

ii) Décrire l'isométrie affine $r_D \circ r_C \circ r_B \circ r_A$.

iii) Décrire l'isométrie affine $r_C \circ r_B \circ r_A$.

II

Soient a et b deux nombres réels. On considère dans l'espace affine $\mathbb{R}^4$ les sous-ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ définis respectivement par les couples d'équations

$$(\mathcal{F}) \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = a \end{cases} \qquad (\mathcal{G}) \begin{cases} x + y + 2z + bt = 1 \\ x - y + 2z + 3t = 2a \end{cases}$$

1°/ Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-espaces affines, et calculer leur dimension.

2°/ Montrer qu'il existe une unique valeur b_0 de b, que l'on déterminera, telle que pour $b \neq b_0$, l'intersection de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est réduite à un point.

3°/ On suppose maintenant que $b = b_0$.

i) Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a, que l'on déterminera, telle que pour $a = a_0$, l'intersection de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est non vide.

ii) On suppose que $a = a_0$. Donner la dimension du sous-espace affine $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, un élément non nul $\overrightarrow{v}$ de son espace vectoriel directeur, et un point P de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

III

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, d'espace euclidien directeur E, et $\{A, B, C\}$ un repère affine de $\mathcal{E}$. À tout point $P = P_0$ de $\mathcal{E}$, on associe la suite $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ de points de $\mathcal{E}$ telle que P_1 est le milieu de AP_0, P_2 est le milieu de BP_1, P_3 est le milieu de CP_2, P_4 est le milieu de AP_3, etc. On note $P = xA+yB+zC$ $(x+y+z=1)$ l'expression en coordonnées barycentriques du point de départ P dans le repère $\{A, B, C\}$.

1^0/ Déterminer les coordonnées barycentriques des points P_1, P_2, P_3 en fonction de x, y, z.

2^0/ Soit D le point de coordonnées barycentriques $(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$. Montrer que les points P, P_3 et D sont alignés.

3^0/ i) Calculer $||\overrightarrow{DP_3}||$ en fonction de $||\overrightarrow{DP}||$.

ii) Montrer que la suite $\{P_{3n}, n \in \mathbb{N}\}$ de points de $\mathcal{E}$ converge vers le point D.

iii) Montrer que la suite $\{P_{3n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ est convergente, et déterminer sa limite.

IV

On considère dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ les six points

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On note (x, y, z) les coordonnées relatives au repère cartésien usuel $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1^0/ i) Déterminer l'isobarycentre du système (A, B, C, D, E, F).

ii) Montrer qu'il existe une unique rotation r de $\mathbb{R}^3$ telle que $r(A) = A, r(B) = B$, $r(C) = F, r(F) = D, r(D) = E$ et $r(E) = C$.

iii) Donner la matrice de cette rotation dans le repère cartésien $\{O; e_1, e_2, e_3\}$.

2^0/ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (z, x, y)$. Montrer que f est une isométrie et déterminer ses caractéristiques.

3^0/ On considère l'ensemble $\mathcal{X} = \{A, B, C, D, E, F\}$, et on note G l'ensemble des isométries u de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient $u(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.

i) Montrer que G forme un groupe pour la composition et que r et f appartiennent à G. Quel est l'ordre de r (= plus petit entier n tel que $r^n = id_{\mathbb{R}^3}$) ? Celui de f ?

ii) Trouver dans G un élément s d'ordre 2 ne fixant aucun des points de $\mathcal{X}$.

iii) Montrer que G contient au moins 24 éléments.