TD 1

Soit k un corps (commutatif) ; on note car(k) sa caractéristique, i.e. le plus petit entier n tel que $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}} = 0$ dans k.

On note rg(A) le rang d'une matrice $A \in M_{n,m}(k)$, i.e. le nombre maximal de colonnes de A qui soient linéairement indépendantes, ou encore la dimension de l'image de l'application $k^m \to k^n$ associée à A.

Exercice 1

Enoncé. Soient a et b deux nombres réels et soit $\mathscr{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases} ;$$

montrez que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ (on en donnera un point et l'espace directeur ; la réponse dépend en partie de a et b) ; quelle est sa dimension ?

Correction. Les deux premières colonnes de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes, il suit que l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$ associée est surjective. Ainsi, $M^{-1}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\}$ est non vide pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et est donc un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ de dimension dim $(\ker(M)) = 1$ (d'après la formule du rang).

Pour trouver une base de l'espace directeur $\ker(M)$ on utilise la méthode du pivot de Gauss pour mettre M sous la forme PAQ où P, Q sont inversibles et A "diagonale" ; la base voulue est alors donnée par les rg$(Q)-$rg(A) dernières colonnes de Q. On commence par multiplier par la gauche pour éliminer le coefficient (2,1) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

On fait maintenant des opérations sur les colonnes (i.e. des multiplications à droite) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

et comme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

il suit qu'un vecteur directeur de $\ker(M)$ est $(1, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$. Pour trouver une solution particulière à l'équation on va la chercher avec sa troisième coordonnée nulle puisque M induit un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^2 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$; un calcul trivial donne le point $(\frac{2a+b}{2}, \frac{a-2b}{5}, 0) \in \mathbb{R}^3$. Finalement, l'espace des solutions est :

$$\begin{bmatrix} \frac{2a+b}{2} \\ \frac{a-2b}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + (\mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2

Enoncé. Soit $u \in \mathbb{Q}$. Vérifiez que les deux sous-ensembles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ de $\mathbb{Q}^4$ respectivement définis par les équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & u \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 2u \end{array}\right.$$

sont des sous-espaces affines de $\mathbb{Q}^4$, dont on donnera pour chacun un point, l'espace directeur et la dimension. Pour quelle valeur de u s'intersectent-ils ? Donner alors un point, l'espace directeur et la dimension de l'intersection.

Correction. On veut déterminer explicitement (i.e., donner un point et une base de l'espace directeur) les sous-espaces affines de $\mathbb{Q}^4$ donnés par les solutions aux systèmes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & u \end{array}\right. \tag{1}$$

et

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 2u \end{array}\right. \tag{2}$$

Les deux matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sont de rang 2, donc chacun des deux systèmes admet un espace de solutions de dimension 2. Les vecteurs $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0, 1)$ sont linéairement indépendants et appartiennent tus deux au noyau de M_1 ; ils forment donc une base de ce noyau, i.e. une base de la direction de l'espace des solutions à (1). On trouve facilement une solution particulière, par exemple en restreignant aux deux dernières coordonnées on obtient le point $(0, 9, u/2, u/2)$. Finalement, l'espace des solutions à (1) est donc :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u/2 \\ u/2 \end{bmatrix} + \left(\mathbb{Q} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{Q} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

La matrice M_2 est plus compliquée ; on effectue un pivot de Gauss et on obtient :

$$M_2 = P_2^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2^{-1}$$

où

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & -2 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Une solution particulière se trouve facilement, et on obtient finalement l'espace de solutions :

$$\begin{bmatrix} \frac{1+2u}{2} \\ \frac{1-2u}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\mathbb{Q} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{Q} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Comme ces deux espaces sont de dimension 2 dans un espace de dimension 4, leur intersection peut être vide, un point ou une droite affine. On calcule le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ & -2 & & 2 \\ & & 1 & 2 \\ & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & & 2 \\ & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & & 2 \\ & 1 & 2 \\ & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

On en déduit que M est de rang 3 (on vérifie facilement que les trois premières colonnes sont indépendantes). Ainsi, les espaces directeurs $\ker(M_1)$ et $\ker(M_2)$ on pour intersection une droite et l'espace des solutions simultanées de (1) et (2) est une droite affine si $(0, u, 1, 2u) \in \operatorname{Im}(M)$ et vide sinon. Le calcul de déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & u \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ & -2 & & u \\ & & 1 & 1 \\ & -2 & 1 & 2u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & & u \\ & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & & u \\ & 1 & 1 \\ & 1 & u \end{vmatrix} = 2(1-u)$$

montre qu'on est dans le premier cas si et seulement si $u = 1$; l'espace est alors :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbb{Q} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3

Enoncé. Soit $\mathscr{F}$ le sous-espace affine de $\mathbb{C}^4$ passant par $(1; 0; i; -1)$ et dont l'espace directeur est engendré par $(1; 1; i; -i)$ et $(0; 1+i; 1; -1)$; donnez un système d'équations cartésiennes de $\mathscr{F}$.

Correction. Soient v_1, v_2 les vecteurs directeurs de $\mathscr{F}$ donnés par l'énoncé ; pour trouver la partie linéaire d'un système d'équations de $\mathscr{F}$ on doit trouver une base dans l'espace $E = \mathscr{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C})$ des formes linéaires sur $\mathbb{C}^4$ au noyau de l'application $f \mapsto (f(v_1), f(V_2)$ de E dans $\mathbb{C}^2$. Ceci revient à résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x & + & y & + & iz & - & it & = & 0 \\ & & (1+i)y & + & z & - & t & = & 0 \end{cases}$$

La matrice du système se met sous forme “diagonale par de simples opérations sur les colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & i & -i \\ 0 & 1+i & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & -i \\ 0 & 1+i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & -i \\ 0 & 1+i & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & i \\ & 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{1-i}{2} \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & i \\ & 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{1-i}{2} \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-3i+1}{2} & \frac{3i-1}{2} \\ & 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{1-i}{2} \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

et il suit qu'une base de notre espace est donné par les formes linéaires $z \mapsto \frac{3i-1}{2} z_1 + \frac{1-i}{2} z_2 - z_3$ (troisième colonne) et $z \mapsto z_3 + z_4$ (somme des deux dernières colonnes). On a donc un système d'équations pour $\mathscr{F}$ de la forme :

$$\begin{cases} \frac{3i-1}{2} x & + & \frac{1-i}{2} y & + & z & & & = & a \\ & & & & z & + & t & = & b \end{cases}$$

pour des $a, b \in \mathbb{C}$. La condition $(1, 0, i, -1) \in \mathscr{F}$ donne $a = \frac{i-1}{2}, b = 1 + i$.

Exercice 4

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur un corps k et soient A et B deux points *distincts* de $\mathscr{E}$.

i) Montrez qu'il existe une et une seule droite affine de $\mathscr{E}$ passant par A et B ; on la note (AB).

ii) Montrez que si k est de caractéristique différente de 2, un sous-ensemble non vide $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ en est un sous-espace affine si et seulement si $(AB) \subset \mathscr{F}$ pour tout couple (A, B) d'éléments distincts de $\mathscr{F}$ (en fait, il suffit que k soit différente de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire ait au moins trois éléments ; mais la preuve sous cette hypothèse est plus difficile ; vous pouvez essayer d'y réfléchir).

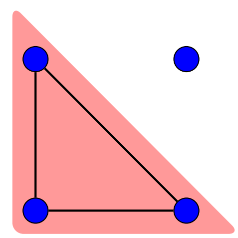
Correction. i) Ce n'est qu'un exercice de rédaction :

- Si $A, B \in \mathcal{E}$ sont deux points distincts, on pose $v = \overrightarrow{AB} \neq 0$; la droite affine $\mathcal{D}_0 = A + kv$ contient alors A (évidemment) et $B = A + v$.
- Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{E}$ contenant A et B ; on écrit sa direction $\overrightarrow{\mathcal{D}} = kv$ pour un $v \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ non nul, on a alors $\mathcal{D} = A + kv$. Il existe un $\lambda \in k$ tel que $B = A + \lambda v$, et comme $A \neq B$ on a $\lambda \neq 0$. Par définition du vecteur $\overrightarrow{AB}$ il vient $\lambda v = \overrightarrow{AB}$, d'où il suit que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$.

On notera donc (AB) l'unique droite de $\mathcal{E}$ contenant A et B.

ii)

On commence par remarquer que le résultat est faux si $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: le sous-ensemble $\{(0,0), (0,1), (1,0)\} \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-espace affine (car son cardinal est 3, et le cardinal d'un espace affine sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une puissance de 2) mais il contient toute droite affine entre deux de ses points.

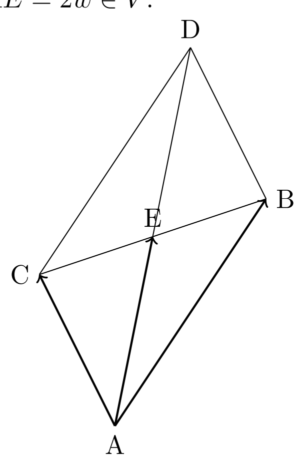


Soit maintenant k de caractéristique différente de 2 (i.e. $2 := 1 + 1 \neq 0$ dans k), S un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ tel que $(AB) \subset S$ pour touts $A, B \in S$. On suppose S non vide, et on choisit un point $A \in S$. On pose :

$$V = \{\overrightarrow{AB},\ A, B \in S\} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$$

et on veut vérifier que V est un sous-espace vectoriel. Soient $\lambda \in k$ et $v = \overrightarrow{AB} \in V$, on veut montrer que $\lambda v \in V$. On pose $C = A + \lambda v$; C est un point de la droite affine (AB) qui est incluse dans S, d'où il suit que $C \in S$ et $\lambda v = \overrightarrow{AC} \in V$ (on remarque qu'on n'a pas utilisé ici l'hypothèse sur la caractéristique de k).

Soient $u = \overrightarrow{AB} \in V$, $v = \overrightarrow{AC} \in V$, on va montrer que $u + v \in V$. On pose $D = A + u + v$, $w = 2^{-1}\overrightarrow{BC}$ et $E = B + w = C - w$. On a $E \in (BC) \subset S$ d'où il suit que $w \in V$, et on va montrer que $u + v = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE} = 2w \in V$.



On écrit :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD};$$

on a d'autre part

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$$

et $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BE}$, donc :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}$$

ce qui finit la preuve.

La preuve de l'implication réciproque (un sous-espace affine contient toutes les droites entre deux de ses points) est triviale et laissée au lecteur. Bien sûr, la caractéristique du corps k n'y joue aucun rôle.

Remarque. L'exercice indique que le résultat ci-dessus est en fait vrai pour tous les corps différents de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La preuve de cet énoncé se fait comme suit : on choisit un point $E \in (BC)$ distinct de B et C (ce qui est possible car $|(BC)| = |k| > 3$), on a alors $E \in S$. Comme $E \neq C$ la droite (DE) n'est pas parallèle à (AB), donc ces deux droites s'intersectent en un point $F \in S$. Comme $E \neq B$ on a $F \neq B, E$, et il suit que la droite (EF) est bien définie, contenue dans S et contient D.

Exercice 5

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine sur un corps ayant au moins trois éléments et soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$; on suppose que k a au moins trois éléments. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ pour que leur réunion soit un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.

Correction. On va montrer que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ou $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. On remarque que ce résultat est faux si $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ puisque (par exemple) une droite est l'union de deux points.

Supposons donc $|k| > 3$ et $\mathcal{F}_2 \not\subset \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1 \not\subset \mathcal{F}_2$. Il existe alors des points $P_1 \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$, $P_2 \in \mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_1$; soit Q un point de la droite (P_1P_2) distinct de P_1 et P_2 (qui existe car $|(P_1P_2)| = |k| > 2$). On ne peut avoir $Q \in \mathcal{F}_1$: si tel était le cas, la droite (PQ) toute entière serait contenue dans $\mathcal{F}_1$, d'où il suivrait que $P_2 \in \mathcal{F}_1$. De la même manière on a $Q \notin \mathcal{F}_2$. La droite (P_1P_2) n'est donc pas contenue dans $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, d'oìl suit que ce dernier ne peut être un sous-espace affine.

Exercice 6

Enoncé. On suppose que k est de caractéristique différente de 2 (autrement dit, $2 \neq 0$ dans k) ; soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine.

i) Si A, B sont deux points de $\mathscr{E}$, montrez qu'il existe un unique point M de $\mathscr{E}$ tel que $\vec{MA} + \vec{MB}= 0$; on l'appelle le *milieu de* A, B.

ii) Soient A, B, C, D quatre points de $\mathscr{E}$. Montrez que $\vec{AB}=\vec{CD}$ si et seulement si A, D et B, C ont même milieu.

iii) Donnez un contre-exemple à l'assertion i) lorsque $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Correction. i) Soit 2^{-1} l'inverse de 2 dans k ; on pose $M = A + 2^{-1}\ \vec{AB}$ de sorte que $\vec{MA}= -2^{-1}\ \vec{AB}$. On a alors $\vec{MB}=\vec{MA} + \vec{AB}= (1 - 2^{-1})\ \vec{AB}$; comme $2(1 - 2^{-1}) = 2 - 1 = 1$ dans k on a $1 - 2^{-1} = 2^{-1}$ et M vérifie donc bien $\vec{MA}= -\ \vec{MB}$. Supposons que $M' \in \mathscr{E}$ soit aussi solution de $\vec{M'A} + \vec{M'B}= 0$, il vient alors $\vec{M'A} + \vec{M'B}= 0 = -\ \vec{MA} - \vec{MB}$ d'où suit $2\ \vec{MM'}= 0$ et comme $\mathrm{car}(k) \neq 2$ on a $\vec{MM'}= 0$, i.e. $M = M'$.

ii) On commmence par supposer que A, D et B, C ont même milieu, i.e. il existe $M \in \mathscr{E}$ tel que $\vec{MA} + \vec{MD}= 0 =\vec{MB} + \vec{MC}$. Il suit immédiatement que $\vec{AB}=\vec{CD}$ (et aussi que $\vec{BD}=\vec{AC}$). Réciproquement, si $\vec{AB}=\vec{CD}$ et M est le milieu de A, D on a $\vec{MB}=\vec{MA} + \vec{AB}$ et $\vec{MC}=\vec{MD} + \vec{DC}=\vec{MD} - \vec{AB}$ d'où il suit que $\vec{MC} + \vec{MB}=\vec{MA} + \vec{MD}= 0$.

iii) Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $A \neq B$ deux points de $\mathscr{E}$. Le milieu de A, B appartient clairement à la droite (AB) ; comme $|(AB)| = 2$ on a donc $M = A$ ou $M = B$. Si $M = A$ il vient $\vec{MB}= 0$ soit encore $\vec{AB}= 0$ ce qui est absurde car $A \neq B$, de même si $M = B$. Si $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ deux points n'ont donc jamais de milieu s'ils sont distincts.

Exercice 7

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ le $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-espace affine $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.

i) Combien $\mathscr{E}$ a-t-il de points ? Combien une droite de $\mathscr{E}$ a-t-elle de points ? Combien de droites de $\mathscr{E}$ passent par un point donné ? Combien $\mathscr{E}$ a-t-il de droites ?

ii) On considère le «triangle» ABC de $\mathscr{E}$ où $A = (0, 0)$, où $B = (1, 0)$ et où $C = (-1, 1)$. Calculez les coordonnées des milieux de AB, BC et AC, puis l'équation des «médianes» du triangle, c'est-à-dire des droites passant par un sommet et le milieu des deux autres. Montrez que les médianes sont ici ... parallèles !

iii) Traitez à nouveau la question ii) mais en supposant que l'on travaille dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$; vérifiez que les médianes sont cette fois-ci concourantes.

Correction. i) On a $|\mathcal{E}| = |\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}|^2 = 9$, toutes les droites de E sont en bijection avec $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et ont donc trois points. Si $P \in \mathcal{E}$, les droites issues de P sont en bijection avec l'ensemble

$$\{Q \in \mathcal{E},\ Q \neq P\}/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence donnée par :

$$Q \sim Q' \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times,\ \overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PQ'}.$$

Les classes d'équivalence contiennent toutes exactement deux points, il suit qu'il y a exactement $(|\mathcal{E}|-1)/2 = 4$ droites passant par P. Enfin, les droites de $\mathcal{E}$ sont en bijection avec l'ensemble :

$$\big(\mathcal{E} \times \mathcal{E} \setminus \{(P,P),\ P \in \mathcal{E}\}\big)/\sim'$$

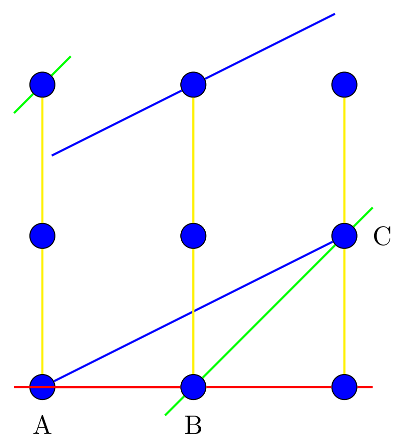
où $\sim'$ est la relation d'équvalence donnée par :

$$(P,Q) \sim' (P',Q') \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times,\ \overrightarrow{P'Q'} = \lambda \overrightarrow{PQ}$$

dont les classes ont toutes six éléments, d'où il suit que $\mathcal{E}$ contient $(81-9)/6 = 12$ droites. On peut aussi calculer ce dernier cardinal de la manière suivante : il y a quatre classes de droites affines parallèles dans $\mathcal{E}$, et une droite donnée a trois translatées distinctes. Chaque classe contient donc trois droites, ce qui fait un total de $3 \times 4 = 12$ droites.

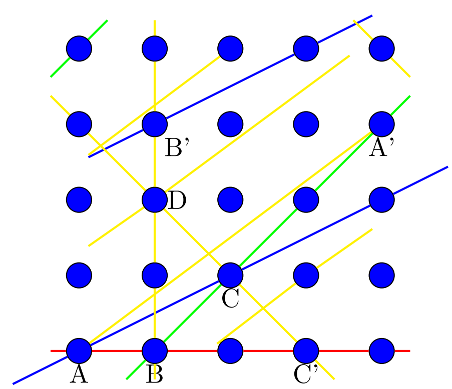
ii)

Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ on a $2^{-1} = 2$, le milieu de AB est donc $(2,0)$, celui de BC est $(0,2)$ et celui de AC est $(1,2)$. Les trois médianes sont donc “verticales” (elles ont pour équations respectives $x = 2, 0, 1$).



iii)(Je prends $C = (2,1)$, contrairement à l'énoncé où $C = (4,1)$.)

Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on a $2^{-1} = 3$, le milieu de AB est donc $C' = (3,0)$, celui de BC est $A' = (4,3)$ et celui de AC est $B' = (1,3)$. On vérifie que les trois médianes sont concourantes au point $D = (1,2)$.



Exercice 8

Enoncé. On note $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et soit n un entier. Montrez que le sous-ensemble de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ formé des fonctions g telles que $g^{(n)} = f$ est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$; donnez son espace directeur, vérifiez qu'il est de dimension finie et donner sa dimension. L'espace $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ est-il lui-même de dimension finie ?

Correction. C'est un fait bien connu d'analyse réelle (et je ne le démontre pas ici) que $\{g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}),\ g^{(n)} = f$ est un sous-espace affine dont l'espace directeur V_n est formé des fonctions $x \mapsto a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ pour $(a_{n-1}, \ldots, a_0) \in \mathbb{R}^n$, il est donc de dimension finie égale à n. L'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ contient pour tout n un espace de dimension n (par exemple V_n) et ne peut donc pas être de dimension finie.

Exercice 9

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine d'espace directeur E et soit $\mathscr{F}$ une partie de $\mathscr{E}$ telle $\{\overrightarrow{MN}\}_{M\in\mathscr{F},N\in\mathscr{F}}$ soit un sous-espace vectoriel de E. La partie $\mathscr{F}$ est-elle nécessairement un sous-espace affine de $\mathscr{E}$?

Correction. La réponse est négative : en effet, pour que $\mathscr{F}$ soit un sous-espace affine il faut que *pour un $M \in \mathscr{F}$ fixé* le sous-ensemble $\{\overrightarrow{MN}\}_{M\in\mathscr{F},N\in\mathscr{F}}$ soit un sous-espace vectoriel de E. Par exemple, le demi-plan $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$ n'est pas un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ mais $\{\overrightarrow{MN}\}_{M\in H,N\in H}$ est égal à tout l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine et soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$. Discuter des configurations possibles (nature de l'intersection, dimension du sous-espace engendré) de $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ dans chacun des cas suivants :

i) $\dim \mathscr{E} = 3, \dim \mathscr{F} = 1, \dim \mathscr{G} = 2$;
ii) $\dim \mathscr{E} = 3, \dim \mathscr{F} = 2, \dim \mathscr{G} = 2$;
iii) $\dim \mathscr{E} = 4, \dim \mathscr{F} = 2, \dim \mathscr{G} = 2$;
iv) $\dim \mathscr{E} = 4, \dim \mathscr{F} = 2, \dim \mathscr{G} = 3$.

Exercice 11

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine de dimension 3 et soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de $\mathscr{E}$ non parallèles et d'intersection vide.

i) Montrez qu'il existe un unique plan $\mathscr{P}$ contenant $\mathscr{D}$ et parallèle à $\mathscr{D}'$; on définit de même $\mathscr{P}'$.
ii) Soit $M \in \mathscr{E}$. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

  a) il existe une droite Δ contenant M et rencontrant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$;
  b) $M \in (\mathscr{E} - (\mathscr{P} \cup \mathscr{P}')) \cup \mathscr{D} \cup \mathscr{D}'$.

Correction. i) Par hypothèse les directions $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}'}$ sont deux droites vectorielles distinctes ; soit V l'unique plan de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ qui les contienne. Soit P un point de $\mathcal{D}$, le sous-espace affine $\mathcal{P}_0 = P + V$ est un plan parallèle à $\mathcal{D}'$ et qui contient $\mathcal{D}$. Si un sous-espace affine $\mathcal{P}$ contient $\mathcal{D}$ et est parallèle à $\mathcal{D}'$, sa direction doit contenir $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}'}$, si c'est un plan elle sera donc égale à $\overrightarrow{\mathcal{P}_0}$ et comme $P \in \mathcal{P}$ il suit que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$.

ii) On commence par montrer a $\Rightarrow$ b ; on doit voir qu'un point $M \in \mathcal{E}$ qui vérifie (a) et qui est contenu dans $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}'$ est sur une des droites $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}'$. Soit donc $M \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ tel qu'il existe une droite $\Delta \ni M$ telle que $\Delta \cap \mathcal{D}$, $\Delta \cap \mathcal{D}'$ soient non vides. On suppose que $M \in \mathcal{P}$ et $M \notin \mathcal{D}$; comme Δ rencontre M elle contient alors deux points distincts de $\mathcal{P}$, d'où il suit que l'on doit avoir $\Delta \subset \mathcal{P}$. Mais on sait que $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$, ce qui contredit le fait que $\Delta \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset$: on a donc en fait $M \in \mathcal{D}$. De la même manière on montre que $M \in \mathcal{P}'$ implique $M \in \mathcal{D}'$.

On montre maintenant la réciproque b $\Rightarrow$ a. Si M est un point de $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}'$ il est évident que l'on peut trouver une droite Δ : par exemple si $M \in \mathcal{D}$, pour tout point $M' \in \mathcal{D}'$ la droite (MM') convient. Dans la suite on suppose donc que $M \in \mathcal{E} \setminus \big(\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'\big)$. Il existe alors un unique plan $\mathcal{Q}$ contenant M et $\mathcal{D}$; comme on a supposé que $M \notin \mathcal{P}$ on a $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$. Par l'unicité dans la question (i) ce plan ne peut être parallèle à $\mathcal{D}'$, et l'intersection $\mathcal{D}' \cap \mathcal{Q}$ doit donc être non vide (en fait elle contient exactement un point). Soit $Q \in \mathcal{D}' \cap \mathcal{Q}$; la droite (MQ) ne peut être parallèle à $\mathcal{D}$ (sinon l'unique plan $\mathcal{Q}'$ contenant M et $\mathcal{D}'$ serait parallèle à $\mathcal{D}$, d'où il suivrait que $\mathcal{Q}' = \mathcal{P}'$ par unicité dans (i), ce qui n'est pas possible puisque on a supposé $M \notin \mathcal{P}'$). Comme (MQ) et $\mathcal{D}$ sont toutes deux contenues dans le plan $\mathcal{Q}$ elles s'intersectent en un point ; la droite $\Delta = (MQ)$ convient donc.

Exercice 12

Enoncé. Soit $n \geqslant 1$ et soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de points d'un k-espace affine $\mathscr{E}$. Soit $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ engendré par $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ (resp. $\{P_0, \ldots, P_n\}$). Montrez que l'on a $\mathscr{G} = \mathscr{F}$ ou $\dim \mathscr{G} = \dim \mathscr{F} + 1$. On établira ce résultat par deux méthodes différentes : dans un premier temps, on montrera que $\mathscr{G}$ est le sous-espace affine engendré par $\mathscr{F} \cup \{P\}$ et l'on appliquera la formule du cours ; dans un second temps, on utilisera la description explicite de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ donnée en cours.

Correction. Comme $\mathscr{G}$ contient les points $P_0, \ldots, P_{n-1}$ il contient aussi le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ qu'ils engendrent, c'est-à-dire que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$. On distingue alors deux cas : soit $P_n \in \mathscr{F}$, et alors on a $\mathscr{G} = \mathscr{F}$, soit $P_n \notin \mathscr{F}$ et dans ce cas $\mathscr{G}$ est engendré par les sous-espaces affines d'intersection vide $\mathscr{F}$ et $\{P_n\}$; on a donc $\dim \mathscr{G} = \dim \mathscr{F} + \dim \{P_n\} = \dim \mathscr{F} + 1$.

La seconde méthode est laissée au lecteur.

Exercice 13

Enoncé. Soit $n \geqslant 0$ et soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de points d'un k-espace affine ; soit I un sous-ensemble non vide de $\{0, \ldots, n\}$. Montrez que si $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de points affinement indépendants, alors $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de points affinement indépendants. Là encore, on donnera deux preuves : l'une reposant sur la caractérisation de l'indépendance affine au moyen de la liberté d'une certaine famille de vecteurs, l'autre utilisant le critère de dimension du sous-espace affine engendré, et l'exercice ci-dessus.

Correction. On sait qu'une famille $(Q_j)_{j \in J}$ de pointe de est affinement indépendante si et seulement si pour tout $j_0 \in J$ les vecteurs $(\overrightarrow{Q_{j_0}Q_j})_{j \in J, j \neq j_0}$ forment une famille liéairement indépendante. Soit $i_0 \in I$; on sait donc que la famille $(\overrightarrow{P_{i_0}P_i})_{i \in \{0,\ldots,n\}, i \neq i_0}$ est linéairement indépendante, et il suit que la sous-famille $(\overrightarrow{P_{i_0}P_i})_{i \in I, i \neq i_0}$ l'est aussi, i.e. $(P_i)_{i \in I}$ est affinement indépendante.

Comme indiqué ce résultat se déduit aussi d'un raisonnement sur la dimension : supposons qu'il existe un sous-ensemble $I \neq \emptyset$ de $\{0, \ldots, n\}$ tel que la famille $(P_i)_{i \in I}$ ne soit pas indépendante. On pose $\mathscr{P}_I = \langle (P_i)_{i \in I} \rangle$; on a alors $\dim \mathscr{P}_I \leq |I| - 2$. D'autre part on a $\dim \mathscr{P}_{\{0,\ldots,n\}-I} \leq |\{0, \ldots, n\} - I| - 1 = n - |I|$ et il suit que, vu que

$$\mathscr{P} := \langle P_0, \ldots, P_n \rangle = \langle \mathscr{P}_{\{0,\ldots,n\}-I} \cup \mathscr{P}_I \rangle$$

on a $\dim \mathscr{P} \leq \dim \mathscr{P}_I + \dim \mathscr{P}_{\{0,\ldots,n\}-I} + 1 \leq n - 1$. Or les points $P_0, \ldots, P_n$ sont affinements indépendants et il suit que $\dim \mathscr{P} = n$, ce qui donne une contradiction.

Exercice 14

Enoncé. À quelle condition sur le réel a les quatre points

$$(1; 1; a),\ (2; 3; 2a),\ (3; 1 - a; a - 1),\ (2; 3; 3 + a)$$

de $\mathbb{R}^3$ sont-ils affinement indépendants ? Pour chaque valeur de a pour lequel ils ne le sont pas, donnez la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

Correction. On note A, B, C, D ces points ; ils sont affinements indépendants si et seulement si les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants, i.e. si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -a & 2 \\ a & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

est non nul. On calcule :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -a & 2 \\ a & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4-a & 0 \\ a-3 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -(a+4)(a-3).$$

Les quatre points A, B, C, D sont donc affinement indépendants si et seulement si $a \neq 3, -4$. Dans le cas contraire ils engendrent un plan ; pour $a = 3$ il est donné par l'équation cartésienne

$$x + y + z = 5;$$

pour $a = -4$ par

$$2x - y = 1.$$

Exercice 15

Enoncé. Soit $\mathscr{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ formé des quadruplets (x, y, z, t) tels que $x - y + 2z + 3t = 5$; montrez que c'est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera l'espace directeur ; donnez un repère affine de $\mathscr{F}$; complétez-le en un repère affine de $\mathbb{R}^4$.

Correction. La technique du pivot de Gauss dans le cas d'une matrice ligne est triviale : on voit immédiatement que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (1\,0\,0\,0)$$

et l'espace directeur de $\mathscr{F}$ est donc engendré par les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On cherche une solution affine avec $y = z = t = 0$, on trouve immédiatement $x = 5$. Un repère affine de $\mathscr{F}$ est donc donné par les points

$$(5, 0, 0, 0),\ (6, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0) \text{ et } (2, 0, 0, 1).$$

Le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ complète une base de F en une base de $\mathbb{R}^4$, et il suit que le point $(6, 0, 0, 0)$ complète le repère affine ci-dessus en un repère affine pour $\mathbb{R}^4$.

Exercice 16

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine, soit $n \geqslant 0$ et soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille de points affinement indépendants de $\mathscr{E}$. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$; soit $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) l'espace affine engendré par les P_j pour $j \leqslant i$ (resp. $j \geqslant i$). Donnez les dimensions de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$; décrire leur intersection. Indication : si vous ne voyez pas ce qui se passe, commencez par penser au cas d'un triplet de points dans $\mathbb{R}^2$ (triangle non aplati) ou d'un quadruplet de points dans $\mathbb{R}^3$ (tétraèdre non aplati).

Correction. D'après l'exercice 13 les familles $P_0, \dots, P_i$ et $P_i, \dots, P_n$ sont affinement indépendantes et on a donc $\dim \mathscr{E} = i$, $\dim \mathscr{F} = n - i$. Comme ces espaces ne sont pas disjoints on a :

$$n = \dim \langle P_0, \dots, P_n \rangle = \dim \langle \mathscr{E} \cup \mathscr{F} \rangle = \dim \mathscr{E} + \dim \mathscr{F} - \dim (\mathscr{E} \cap \mathscr{F}) = n - \dim (\mathscr{E} \cap \mathscr{F})$$

d'où il suit que $\mathscr{E} \cap \mathscr{F}$ est de dimension 0, et comme cette intersection contient P_i on a $\mathscr{E} \cap \mathscr{F} = \{P_i\}$

Exercice 17

Enoncé. Soient :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a). Montrer que les matrices $A_i,\ i = 1,2,3$ sont linéairement indépendantes dans $M_2(\mathbb{R})$; en déduire que les formes linéaires $M \mapsto \operatorname{tr}(A_i M)$ sont indépendantes dans l'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

(b). Montrer que pour touts $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ le sous-ensemble

$$\mathcal{D} = \{M \in M_2(\mathbb{R}),\ \forall i = 1,2,3\ \operatorname{tr}(A_i M) = a_i\}$$

est une droite affine de $M_2(\mathbb{R})$ (muni de sa structure affine canonique en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

(c). Donner un vecteur directeur et un point de $\mathcal{D}$ pour $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$.

Correction. On notera

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

(a). La matrice des coordonnées des A_i dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

cette matrice est de rang maximal (par exemple parce que le mineur maximal

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

est non nul). Il suit que A_1, A_2, A_3 forment une famille libre.

On montre que l'application Φ de $M_2(\mathbb{R})$ dans son dual donnée par $\Phi(M)(X) = \operatorname{tr}(MX)$ est injective. Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ on a $\operatorname{tr}(M^t M) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$, donc $\Phi(M) \neq 0$. On peut aussi remarquer que $\Phi(M)(e_{ij}) = m_{ji}$, donc $\Phi(M) = 0$ implique $m_{ij} = 0$ pour touts i, j et donc $M = 0$.

L'application Φ étant donc injective et la famille des A_i libre, les formes linéaires $\Phi(A_i)$ sont aussi linéairement indépendantes.

(b). Comme les $M \mapsto \operatorname{tr}(A_i M)$ sont indépendantes, l'application linéaire $\phi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$M \mapsto \begin{bmatrix} \operatorname{tr}(A_1 M) \\ \operatorname{tr}(A_2 M) \\ \operatorname{tr}(A_3 M) \end{bmatrix}$$

est surjective. En effet supposons son image contenue dans un sous-espace strict V de $\mathbb{R}^3$. Alors V est contenu dans un hyperplan donné par une équation $ax + by + cz = 0$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Il suit que pour toute $M \in M_2(\mathbb{R})$ on a $a \operatorname{tr}(A_1 M) + b \operatorname{tr}(A_2 M) + c \operatorname{tr}(A_3 M) = 0$, ce qui est une relation non triviale entre les $\Phi(A_i)$.

Ainsi, pour toute valeur des a_i, l'ensemble $\mathcal{D} = \phi^{-1}(\{(a_1, a_2, a_3)\})$ est non vide. Si M_0 en est un point on a alors $\mathcal{D} = M_0 + \ker(\phi)$; la dimension de $\ker(\phi)$ est égale à $4 - 3 = 1$, donc $\mathcal{D}$ est bien une droite affine.

(c). Dans ce cas D est formé des matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ qui vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccl} x & & & + & z & - & t & = 0 \\ x & - & y & & & + & t & = 0 \\ 2x & + & y & + & z & + & 2t & = 0 \end{array} \right.$$

Un pivot de Gauss sur ce système (je ne donne pas les détails du calcul) donne alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, par exemple :

$$D = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche ensuite un point de l'espace avec $t = 0$, ce qui revient à résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{cccccl} x & & & + & z & = 1 \\ x & - & y & & & = 2 \\ 2x & + & y & + & z & = 3 \end{array} \right.$$

On trouve finalement (après un pivot de Gauss que je laisse au lecteur) la solution particulière

$$M_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite on note $k_n[T]$ l'espace vectoriel ou affine des polynômes en une variable à coefficients dans le corps k de degré inférieur ou égal à n

Exercice 18

Enoncé. Soient $P_1 = T^3 + T^2 + T + 1$, $P_2 = 2T^3 - iT + 5$ et $Q = T^2$. Donner un système d'équations affines du sous-espace affine de $\mathbb{C}_3[T]$ de direction $\mathbb{C}P_1 \oplus \mathbb{C}P_2$ passant par Q.

Correction. On commence par chercher des équations de l'espace directeur $V = \mathbb{C}P_1 \oplus \mathbb{C}P_2$. Une forme linéaire ℓ sur $\mathbb{C}_3[T]$ est déterminée par ses valeurs $\ell(T^3) = a$, $\ell(T^2) = b$, $\ell(T) = c$ et $\ell(1) = d$. On cherche à en déterminer deux qui soient indépendantes et qui s'annulent sur P_1 et P_2, c'est-à-dire que l'on cherche une base du sous-espace linéaire formmé des $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 2a - c + 5d = 0 \end{array} \right.$$

Un pivot de Gauss sur ce système donne les deux solutions indépendantes :

$$(a, b, c, d) = (1, -3, 2, 0), (-2, 0, 1, 1)$$

qui donnent les équations suivantes pour V :

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + z + t = 0 \end{array} \right.$$

On cherche donc une équation pour $\mathcal{V} = Q + V$ sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 2z = c_1 \\ -2x + z + t = c_2 \end{array} \right.$$

Il vient $-3 = c_1$, $0 = c_2$.

Exercice 19

Enoncé. Soit n un entier positif. Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_n[T],\ \int_0^1 P(t)dt = 1\}$ est un sous-espace affine de dimension n de $\mathbb{R}_n[T]$; en donner un repère affine.

Correction. L'application $\ell : P \mapsto \int_0^1 P(x)dx$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_n[X]$. Il suit donc que $\mathcal{F} = \ell^{-1}(\{1\})$ est un sous-espace affine de codimension 1 de $\mathbb{R}_n[X]$, donc sa dimension est $n+1-1=n$. On va montrer que les points $\{P_k = \frac{1}{k+1}X^k,\ k=0,\dots,n\}$ sont affinement indépendants et appartiennent à $\mathcal{F}$; il suit qu'ils forment une base affine de $\mathcal{F}$. Le fait qu'ils soient dans $\mathcal{F}$ est un calcul simple laissé au lecteur. L'indépendance affine suit par exemple de ce que la matrice des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{P_0P_k}$ pour $k=1,\dots,n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 \\ 1/2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/(n+1) \end{pmatrix}$$

qui est de rang n.

Exercice 20

Enoncé. Dans tout cet exercice k est un corps fini ayant q éléments et $\mathcal{E}$ est un espace affine sur k de dimension 3.

(a). Combien l'espace k^3 contient-il de droites vectorielles distinctes ? En déduire le nombre de droites affines contenues dans $\mathcal{E}$.

(b). Soit P un plan (vectoriel) de E : montrer qu'il existe une forme linéaire $\ell \in \mathcal{L}_k(E,k)$ non ulle telle que $P = \{v \in E,\ \ell(v)=0\}$. Montrer que l'application qui à P associe la droite vectorielle engendrée par ℓ dans E^* est bien définie et est une bijection des plans de E sur les droites de $E^* := \mathcal{L}_k(E,k)$.

(c). Combien y-a-t'il de plans vectoriels dans E ? De plans affines dans $\mathcal{E}$?

Correction.

(a). Les droites vectorielles de E sont en bijection avec l'ensemble :

$$(E - \{0\})/\sim$$

où $v \sim u \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times,\ u = \lambda v$. Chaque classe d'équivalence contient exactement $q-1$ éléments, et $E-\{0\}$ a un cardinal égal à q^3-1, d'où il suit que E contient exactement $(q^3-1)/(q-1) = 1+q+q^2$ droites.

Soit D une droite vectorielle et $\mathcal{D}$ une droite affine de direction D ; si P est un plan vectoriel complémentaire de D dans E, l'ensemble des droites affines de direction D est exactement l'ensemble des droites $\mathcal{D}+v$ pour $v \in P$. En effet, toute droite de cette forme est parallèle à $\mathcal{D}$, et elles sont toutes distinctes : si on a $\mathcal{D}+v = \mathcal{D}+v'$ pour des $v, v' \in P$ il suit que $v - v' \in D \cap P = \{0\}$, donc $v = v'$. Soit O un point de $\mathcal{D}$; si $\mathcal{D}'$ est parallèle à $\mathcal{D}$, alors l'intersection de $\mathcal{D}'$ avec le plan $O+P$ est égale à un point O', et le vecteur $v = \overrightarrow{OO'}$ est dans P, d'où il suit que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}+v$.

Comme tout plan contient q^2 vecteurs on en déduit que le nombre de droites affine de $\mathcal{E}$ est égal à $q^2(1+q+q^2)$.

(b). Soit P un plan vectoriel de E ; il existe des vecteurs $v_1, v_1 \in E$ linéairement indépendants tels que $P = kv_1 + kv_2$. On commence par montrer que l'application linéaire $f : E^* \to k^2$ donnée par $\ell \mapsto (\ell(v_1), \ell(v_2))$ est surjective. On fixe une base $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ de E, et on note v_{ij} les coordonnées de v_i dans b. Les formes linéaires $b_i^* : v \mapsto$ coordonnée de v sur b_i forment une base b^* de E^*, et la matrice de f dans b^* et dans la base canonique de k^2 est $\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \end{pmatrix}$, qui est de rang 2 puisque v_1, v_2 sont linéairement indépendants.

Le noyau de f est donc une droite, et toute forme $\ell \in \ker(f)$ s'annule sur P. Réciproquement, toute forme linéaire $\ell' \in E^*$ qui s'annule sur P doit vérifier $\ell'(v_1) = 0 = \ell'(v_2)$, i.e. $\ell' \in \ker(f)$. L'application $\Phi : P \mapsto \ker(f)$ associe donc à P l'ensemble des formes linéaires qui sont nulles sur P, c'est bien l'application e l'énoncé qui est donc bien définie des plans de E vers les droites de E^*.

On va montrer que Φ est bijective. Si $\ell \in E^*$, $\ell \neq 0$, alors $P = \ker(\ell)$ est un plan de E (ℓ est surjective $E \to k$ donc son noyau est de dimension 2), et on a clairement $\Phi(P) = k\ell$: Φ est donc surjective. D'autre part, si $\Phi(P) = k\ell$ on a $\ell \neq 0$ et $P = \ker(\ell)$; il suit que si $\phi(P') = k\ell$, alors $P' = \ker(\ell) = P$, donc que Φ est injective.

(c). D'après la question 2 les plans de E sont en bijection avec les droites de E^* ; comme ce dernier est une espace vectoriel de dimension 3, d'après la question 1 il contient $1 + q + q^2$ droites. Il y a donc exactement $1 + q + q^2$ plans vectoriels dans E.

Soient P est un plan vectoriel de E et $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathcal{E}$ de direction P. Si D est une droite complémentaire de P dans E, l'ensemble des plans affines de direction P est exactement l'ensemble des plans $\mathcal{P} + v$ pour $v \in D$ (la preuve est la même qu'à la question 1). Il suit que $\mathcal{E}$ contient exactement $|D| = q$ plans de direction P, donc au total il contient $q(1 + q + q^2)$ plans affines.