Université Pierre & Marie Curie
Année 2012-2013

Licence de mathématiques 3
Module 323

TD 2

Exercice 1

Enoncé. Montrez que deux espaces affines de même dimension finie n sur un corps k donné sont toujours isomorphes.

Correction. Soient $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ deux espaces affines sur k de même dimension : il existe un isomorphisme linéaire ϕ entre leurs espaces directeurs E, E'. On fixe des points $P \in \mathscr{E}, P' \in \mathscr{E}'$ et on définit une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ par $f(Q) = P' + \phi(\overrightarrow{PQ})$. Comme ϕ est bijective f l'est aussi, il reste à vérifier que f est bien une application affine : c'est évident par sa définition.

Exercice 2

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2 et soit E son espace directeur. Soit $O \in \mathscr{E}$, soit (e_1, e_2) une base de E et soit $\mathscr{R}$ le repère (O, e_1, e_2) de $\mathscr{E}$.

i) Soit f l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ donnée en coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ par la formule

$$(x, y) \mapsto (2x - 3y + 5, 7x - 2y + 3).$$

Donnez la matrice de f dans $\mathscr{R}$.

ii) Soit O' le point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(2, -1)$; posons $e'_1 = e_1 - 2e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$. Vérifiez que (e'_1, e'_2) est une base de E. Soit $\mathscr{R}'$ le repère (O', e'_1, e'_2) de $\mathscr{E}$; donner la matrice de passage de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}'$; en déduire la matrice de f dans le repère $\mathscr{R}'$, puis une définition de f par une formule en coordonnées dans le repère $\mathscr{R}'$.

iii) Trouvez le repère $\mathscr{R}'' = (O'', e''_1, e''_2)$ de $\mathscr{E}$ caractérisé par la propriété suivante : *si M est un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$, ses coordonnées dans $\mathscr{R}''$ sont* $(x - y + 3, 2x + y - 6)$.

iv) Trouvez un repère $\mathscr{R}'''$ de $\mathscr{E}$ dans lequel f peut être définie par une formule sans termes constants.

Correction. i) La matrice de f dans $\mathscr{R}$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

ii) On va calculer la matrice P de passage de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}'$. Sa partie linéaire est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, qui est égale à $g = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On va maintenant calculer sa partie de translation ; si $A = 0 + xe_1 + ye_2$ il vient

$$\begin{aligned} A &= O' + \overrightarrow{O'O} + x'e'_1 + y'e'_2 \\ &= O' + (x' - 1)e'_1 + (y' - 1)e'_2 \end{aligned}$$

vu que le vecteur $\overrightarrow{O'O} = -2e_1 + e_2$ a pour coordonnées dans $\mathscr{R}'$ $g^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il suit que la matrice de passage P de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}'$ est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part la matrice de passage de $\mathscr{R}'$ à $\mathscr{R}$ est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après l'expression (1) pour la matrice de f on obtient donc la matrice M' de f dans $\mathscr{R}'$:

$$M' = P \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 9 & 1 & 12 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Les coordonnées de e_1 (resp. e_2) dans $\mathscr{R}''$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$). L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a donc que les coordonnées de e''_1 (resp. e''_2) dans $\mathscr{R}$ sont $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (resp. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$). Enfin, on a $O = O'' + 3e''_1 - 6e''_2$ d'où il suit que

$$O'' = O - (e_1 - 2e_2) + 2(e_1 + e_2) = O + e_1 + 4e_2$$

d'après le calcul de e''_1 et e''_2 qui précède.

iv) Si O''' est un point fixe de f, alors f a une expression sans terme de translation dans n'importe quel repère d'origine O'''. On sait qu'il existe un unique point fixe de f (parce que $\overrightarrow{f}$ n'a pas de vecteur fixe non nul : son polynôme caractéristique est égal à

$$\begin{vmatrix} X - 2 & 3 \\ -7 & X + 2 \end{vmatrix} = (X - 2)(X + 2) + 21$$

dont 1 n'est pas racine). La résolution du système affine :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = x \\ 7x - 2y + 3 = y \end{cases}$$

donne que le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 16/9 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{R}$ est le point fixe de f.

Exercice 3

Enoncé. Soit k un corps, soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines sur k d'espaces directeurs respectifs E et F, et soit f une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$. Si $u \in E$ et si $v \in F$, montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $t_v \circ f = f \circ t_u$;
ii) il existe $M \in \mathscr{E}$ tel que $t_v(f(M)) = f(t_u(M))$;
iii) $\overrightarrow{f}(u) = v$.

Cas particulier. On suppose (seulement pour cette question) que $\mathscr{E} = \mathscr{F}$. À quelle condition sur u la translation de vecteur u commute-t-elle à f ?

Question subsidiaire. Démontrer directement l'équivalence entre i) et ii) sans le moindre calcul, en vous fondant sur un résultat du cours.

Une application. Soit g une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ telle que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$. Montrez que f est surjective si et seulement si g est surjective ; si c'est le cas, montrez qu'il existe u dans E tel que $f = g \circ t_u$. Cela reste-t-il vrai en général sans hypothèse de surjectivité ?

Correction. L'implication i)⇒ii) est tautologique. Montrons que ii)⇒iii) : l'hypothèse signifie que $f(M) + v = f(M + u)$; par définition de $\overrightarrow{f}$ ceci donne encore $f(M) + v = f(M) + \overrightarrow{f}(u)$, i.e. $v = \overrightarrow{f}(u)$.

Il reste à voir que iii)⇒i), ce qui se voit immédiatement en renversant le calcul précédent : pour tout $M \in \mathscr{E}$ on a

$$f \circ t_u(M) = f(M + u) = f(M) + \overrightarrow{f}(u) = f(M) + v = t_v \circ f(M).$$

En particulier, si $\mathscr{E} = \mathscr{F}$ et $u = v$ on voit que f commute à la translation t_v si et seulement si v est un point fixe de f, i.e. $f(v) = v$

Comme indiqué dans l'énoncé on peut déduire i)⇔ii) directement du résultat du cours suivant : si deux applications affines ont la même application linéaire associée et s'il existe un point en lequel elles ont la même valeur alors elles sont égales. En effet, on sait que $\overrightarrow{f \circ t_u} = \overrightarrow{f} = \overrightarrow{t_v \circ f}$ et ii) affirme que ces deux applications ont même valeur en M.

Une application : Pour montrer l'équivalence il suffit de montrer qu'une application affine h de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est surjective si et seulement si $\overrightarrow{h}$ l'est. On fixe un point base $M \in \mathscr{E}$. Supposons que h soit surjective et soit $v \in F$. Soit $N = h(M) + v$; il existe un $M' \in \mathscr{E}$ tel que $h(M') = N$ et on a alors $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{MM'}) = \overrightarrow{h(M)N} = v$, ce qui montre que $\overrightarrow{h}$ est surjective. Réciproquement, si $\overrightarrow{h}$ est surjective et $N \in \mathscr{F}$, il existe un $u \in E$ tel que $\overrightarrow{h}(u) = \overrightarrow{h(M)N}$; en posant $M' = M + u$ on a alors $h(M') = f(M) + \overrightarrow{h}(u) = h(M) + \overrightarrow{h(M)N} = N$.

Si $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ il existe (sans hypothèse sur $\overrightarrow{f}$) un vecteur $v \in F$ tel que $f = t_v \circ g$: en effet il suffit de prendre $\overrightarrow{g(M)f(M)}$ pour n'importe quel $M \in \mathscr{E}$ (on a alors $f(M) = t_v(g(M))$ et comme f et $t_v \circ g$ ont la même prtie linéaire il suit que $f = t_v \circ g$). D'après ce qui précède, si de plus f est surjective alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ l'est aussi et il existe donc un $u \in E$ tel que $\overrightarrow{g}(u) = v$. On a alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$, $g \circ t_u(M) = g(M) + \overrightarrow{g}(u) = t_v \circ g(M) = f(M)$. Bien sûr ce résultat n'est pas vrai si f n'est pas surjective : on sait alors que $\overrightarrow{f}$ n'est pas non plus surjective, et si v est n'importe quel vecteur de $F - \overrightarrow{f}(E)$ on voit que l'espace image de $\mathscr{E}$ par $t_v \circ f$ est disjointe de $f(\mathscr{E})$ qui est aussi l'image de $f \circ t_u$ pour tout $u \in E$: en particulier $f \circ t_u \neq t_v \circ f$.

Exercice 4

Enoncé. Si O, A et A' sont trois points d'une droite affine et si $A \neq O$, on se permettra de noter $\dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$ l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$.

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine sur un corps k et soit O, A et B trois points affinement indépendants de $\mathscr{E}$. Soit A' (resp. B') un point de la droite (OA) (resp. (OB)) qui diffère de O. On note h l'unique homothétie de centre O qui envoie A sur A' (justifiez brièvement l'existence et l'unicité de h). On suppose que A, B, O ne sont pas alignés. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\dfrac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = \dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$;
ii) $h(B) = B'$;
iii) les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Remarque. L'équivalence entre i) et iii) est ce qu'on appelle usuellement *le théorème de Thalès.*

Correction. On remarque que le rapport λ de l'homothétie vectorielle $\overrightarrow{h}$ est égal à $\dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$: en effet il est uniquement caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{OA}) = \lambda\overrightarrow{OA}$ et on a $\dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{h(O)h(A)} = \overrightarrow{h}(\overrightarrow{OA})$.

i)⇒ii) : On a :

$$h(B) = h(O) + \overrightarrow{h}(\overrightarrow{OB}) = h(O) + \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB}.$$

Par hypothèse $\dfrac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = \dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$ et comme d'autre part $\overrightarrow{OB'} = \dfrac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{OB}$ il suit que $h(B) = h(O) + \overrightarrow{OB'} = B'$.

ii)⇒iii) : Si $h(B) = B'$ alors $h(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{h(A)h(B)} = \overrightarrow{A'B'}$. L'image de la droite (AB) est donc égale à $A' + k\overrightarrow{A'B'} = (A'B')$.

iii)⇒ii) : Il existe une unique droite parallèle à (AB) passant par le point A' : par hypothèse elle est égale à $(A'B')$. D'autre part on a $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{AB}) \in k^{\times}\overrightarrow{AB}$ et la droite $h((AB)) = h(A) + k\overrightarrow{h}(AB)$ qui passe par $A' = h(A)$ est donc parallèle à (AB) : on en déduit que $h((AB)) = (A'B')$. On a enfin $h(B) \in h((OB)) = (OB')$ et $h(B) \in h((AB)) = (A'B')$ d'où il suit que $h(B) \in (OB') \cap (A'B') = \{B'\}$ (cette dernière égalité vient de ce que les points A, B, O ne sont pas alignés : les droites (OB) et (AB) ne sont alors pas parallèles, d'où il suit que $(OB') = (OB)$ et $(A'B')//(AB)$ ne le sont pas non plus et donc qu'elles se coupent en exactement un point).

ii)$\Rightarrow$i) : Comme $h(B) = B'$ le rapport de h est égal à $\dfrac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}$; mais par définition il est aussi égal à $\dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$ d'où suit l'égalité entre ces deux quantités.

Exercice 5

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur un corps k d'espace directeur E. Soit h une homothétie de $\mathscr{E}$ dont on note O le centre et λ le rapport ; on suppose que $\lambda \neq 1$. Soit $v \in E$; décrire aussi précisément que possible les applications $h \circ t_v$ et $t_v \circ h$.

Correction. Ces deux applications sont des homothéties de rapport λ, il reste è déterminer leurs centres. On a pour $a \in k$ $h(O + (a+1)v) = O + \lambda(a+1)v$ doù il suit que si $P = O + \frac{\lambda}{1-\lambda}v$ on a $h(P+v) = O + \lambda(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda})v = O + \frac{\lambda}{1-\lambda}v = P$.

De la même manière on voit que le point fixe de $t_v \circ h$ est $Q = O + \frac{1}{1-\lambda}v$.

Exercice 6

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur un corps k et soit E son espace directeur. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit π la projection de E sur G parallèlement à F et soit p une application affine de E dans $\mathscr{E}$ dont l'application linéaire associée est π.

a) Déterminez Ker $(\pi - \mathrm{Id})$ et Im $(\pi - \mathrm{Id})$ et vérifiez que

$$E = \mathrm{Ker}\,(\pi - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(\pi - \mathrm{Id}).$$

Qu'en déduit-on à propos de l'application p ?

b) Montrez qu'une application linéaire ℓ de E dans lui-même est une projection (vectorielle) si et seulement si $\ell^2 = \ell$; montrez qu'une application affine f de $\mathscr{E}$ dans lui-même est une projection si et seulement si $f^2 = f$.

Correction.

a). On rappelle que $F = \mathrm{Im}(\pi - Id)$ et $G = \ker(\pi - Id)$ (je ne redémontre pas les résultats d'algèbre linéaire), d'où il suit que $E = \ker(\pi) \oplus \ker(\pi - Id)$ et donc $\pi(\pi - Id) = 0$, i.e. $\pi^2 = \pi$. On fixe une origine $O \in \mathscr{E}$; on pose $v = \overrightarrow{Op(O)}$, de sorte que $p^2(O) = p(O) + \pi(v)$. On va montrer :
(i) le vecteur $u = \pi(v)$ ne dépend pas du point O ;
(ii) on a $p^2 = t_u \circ p$.
Soit O' un point de $\mathscr{E}$; on a $p(O') = p(O) + \pi(\overrightarrow{OO'})$ d'où il suit que :

$$\overrightarrow{O'p(O')} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Op(O)} + \pi(\overrightarrow{OO'}) = \overrightarrow{Op(O)} + (\pi - Id)(\overrightarrow{OO'})$$

En appliquant π à cette égalité on obtient $\pi(\overrightarrow{O'p(O')}) = \pi(\overrightarrow{O'p(O')})$ vu que $\pi(\pi - Id) = 0$, ce qui prouve le point (i).

Soit $M \in \mathscr{E}$; on veut montrer que $p\big(p(M)\big) = p(M) + u$. La partie linéaire de p^2 est π^2, d'où il suit que :

$$\begin{aligned} p^2(M) &= p^2(O) + \pi^2(\overrightarrow{OM}) = p(O) + \overrightarrow{p(O)p^2(O)} + \pi(\overrightarrow{OM}) \\ &= p(O) + \pi(\overrightarrow{Op(O)}) + \pi(\overrightarrow{OM}) = p(O) + u + \pi(\overrightarrow{OM}) \\ &= p(M) + u, \end{aligned}$$

ce qui prouve le point (ii).

b). Soit p une application affine telle que $p^2 = p$; soit V le noyau de sa partie linéaire et $\mathscr{F}$ son image. On note $\pi = \overrightarrow{p}$; on a $\pi^2 = \overrightarrow{p^2} = \pi$ d'où il suit que π est une projection vectorielle et donc en particulier que $E = V \oplus F$. On va montrer que p est la projection sur $\mathscr{F}$ parallèlement à V : on remarque que cette dernière est l'unique application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ telle que $\overrightarrow{Mf(M)} \in V$ pour tout point M. Soit $M \in \mathscr{E}$; comme la partie linéaire π de p est une projection vectorielle, le point (ii) ci-dessus implique que l'on a $\pi(\overrightarrow{Mp(M)}) = 0$. Il suit que l'on a $\overrightarrow{Mp(M)} \in V$ pour tout M, et on conclut que p est bien la projection souhaitée.

Réciproquement, si p est la projection affine sur $\mathscr{F}$ parallèlement à V sa partie linéaire π est la projection vectorielle sur F parallèlement à V et vérifie donc en particulier $\pi^2 = \pi$. Pour obtenir $p^2 = p$ il suffit donc de montrer qu'il existe un point $M \in \mathscr{E}$ tel que $p^2(M) = p(M)$: mais ceci est vrai trivialement pour $M \in \mathscr{F}$.

Exercice 7

Enoncé. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur un corps k de caractéristique différente de 2 et soit E son espace directeur. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit σ la symétrie par rapport à G et parallèlement à F et soit s une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dont l'application linéaire associée est σ.

a) Déterminez Ker $(\sigma - \mathrm{Id})$ et Im $(\sigma - \mathrm{Id})$ et vérifiez que

$$E = \mathrm{Ker}\ (\sigma - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\ (\sigma - \mathrm{Id}).$$

Qu'en déduit-on à propos de l'application s ?

b) Montrez qu'une application linéaire ℓ de E dans lui-même est une symétrie (vectorielle) si et seulement si $\ell^2 = \mathrm{Id}$; montrez qu'une application affine f de $\mathscr{E}$ dans lui-même est une projection si et seulement si $f^2 = \mathrm{Id}$.

Correction.

(a). On suppose car$(k) \neq 2$. On a $G = \ker(\sigma - Id) = \mathrm{Im}(\sigma + Id)$ et $F = \mathrm{Im}(\sigma - Id) = \ker(\sigma + Id)$, d'où il suit que $E = \ker(\sigma - Id) \oplus \ker(\sigma + Id)$ et $(\sigma - Id)(\sigma + Id) = 0$, i.e. $\sigma^2 = Id$. D'autre part, ceci implique que $\frac{1}{2}(\sigma - Id)$ est la projection de noyau G et d'image F, $\frac{1}{2}(\sigma + Id)$ celle de noyau F et image G . On note π cette dernière projection. On fixe une origine O, on pose $v = \overrightarrow{Os(O)}$; on va montrer :

(i) le vecteur $u = \pi(v)$ ne dépend pas du point O ;

(ii) on a $s^2 = t_{2u}$.

Soit O' un point de $\mathscr{E}$; on a $s(O') = s(O) + \sigma(\overrightarrow{OO'})$ d'où il suit que :

$$\overrightarrow{O's(O')} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Os(O)} + \sigma(\overrightarrow{OO'}) = \overrightarrow{Os(O)} + (\sigma - Id)(\overrightarrow{OO'})$$

On rappelle que $F = \mathrm{Im}(\sigma - Id) = \ker(\pi)$; en appliquant π à cette égalité on obtient donc $\pi(\overrightarrow{O's(O')}) = \pi(\overrightarrow{O's(O')})$, ce qui prouve le point (i).

Soit $M \in \mathscr{E}$; on veut montrer que $s\big(s(M)\big) = M + 2u$. La partie linéaire de s^2 est Id, d'où il suit que :

$$s^2(M) = s^2(O) + \overrightarrow{OM}) = s(O) + \sigma(\overrightarrow{Os(O)}) + \overrightarrow{OM} = O + (Id + \sigma)(\overrightarrow{Os(O)}) + \overrightarrow{OM} = M + 2u$$

ce qui prouve le point (ii).

(b). Je ne fais que le sens $s^2 = s \Rightarrow s$ est une projection affine ; la réciproque est laissée au lecteur. Dans ce cas $\sigma := \overrightarrow{s}$ est une symétrie vectorielle car $\overrightarrow{s}^2 = \overrightarrow{s^2} = \overrightarrow{s}$. On note, comme dans la question (a), G son espace fixe et F son espace propre pour -1. Soit $O \in \mathscr{E}$, alors le point mileu Q de O et $s(O)$ est fixé par s : une manière rapide de voir ceci est de remarquer que l'ensemble $\{O, S(O)\}$ est préservé par s et que s envoie le milieu de deux points sur le milieu de leurs images (c'est vrai de toute application affine, et facile à montrer). Une preuve plus ad hoc est la suivante : le vecteur $1/2\overrightarrow{Os(O)}$ est dans F à cause du point (ii) de la question (a) ci-dessus, et on a donc :

$$\begin{aligned} s(Q) &= s(O + 1/2\overrightarrow{Os(O)}) = s(O) + \sigma(1/2\overrightarrow{Os(O)}) \\ &= s(0) - 1/2\overrightarrow{Os(O)}) \\ &= O + \overrightarrow{Os(O)} - 1/2\overrightarrow{Os(O)}) = O + 1/2\overrightarrow{Os(O)} = Q. \end{aligned}$$

Il suit en tout cas que le sous-espace $\mathscr{G} = Q + G$ est fixé par s. (On remarque que cet espace ne dépend pas du point O choisi : si O' est un autre point, Q' le milieu de O', $s(O')$ alors $\overrightarrow{QQ'}$ est fixé par σ (car Q, Q' sont fixés par s) et il suit que $\overrightarrow{QQ'} \in G$, i.e. $Q + G = Q' + G$.) On va donc montrer que s est la symétrie S_0 par rapport à ce sous-espace parallèlement à F. Comme s et s_0 ont la même partie linéaire σ il suffit de montrer qu'il existe un point M de $\mathscr{E}$ tel que $s(M) = s_0(M)$, ce qui est évidemment vrai pour $M \in \mathscr{G}$.

Remarque. Si $\mathrm{car}(k) = 2$ le point (b) est faux : dans ce cas , pour tout $n \geq 2$ il existe des endomorphismes linéaires s de k^n qui vérifient $s^2 = s$ mais qui ne sont pas des symétries (c'est parce que le polynôme $s^2 - 1$ est égal sur k à $(s-1)^2$ dont les racines ne sont pas simples : il est ainsi facile de voir que la seule symétrie est l'identité). Un exemple simple est l'endomorphisme de k^2 donné par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Enoncé. Soit ℓ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminez Ker $(\ell - \mathrm{Id})$ et Im $(\ell - \mathrm{Id})$; montrez que $\mathbb{R}^3$ est la somme directe de ces deux sous-espaces.
b) Soit f l'application affine de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même donnée par la formule

$$(x, y, z) \mapsto (y + 1, x + 2, -z + 3).$$

Déterminez l'unique couple (u, g), où $u \in$ Ker $(\ell - \mathrm{Id})$ et où g est une application affine ayant un point fixe, tel que $f = t_u \circ g$; donnez un point et l'espace directeur de l'ensemble des points fixes de g.

Correction.

(a). L'application ℓ préserve la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$; il suffit donc de diagonaliser sa restriction au sous-espace $\mathbb{R}^2 \times 0$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se diagonalise comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c'est la symétrie d'axes $\{x = y\}, \{x = -y\}$). Il suit que :

$$\begin{aligned} V &:= \ker(\ell - Id) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ W &:= \ker(\ell + Id) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il est clair que ces deux sous-espaces sont en somme directe ; c'est de toute façon clair sans faire de calcul puisque ℓ est une symétrie.

(b). On pose

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix};$$

on a donc $f = t_v \circ \ell$. L'application $f_w := t_w \circ f$ a un point fixe si et seulement si $f_w^2 = Id$, et on calcule que :

$$f_w^2 = (t_{w+v} \circ \ell)^2 = t_{v+w+\ell(v+w)} = t_{2\pi(v+w)}$$

où π est la projection sur V. L'unique $w \in V$ tel que $\pi(v+w) = 0$ est $w = -\pi(v)$, on en déduit que :

$$u = -\frac{1}{2}(\ell + Id)(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On a alors $g = t_u \circ f$; l'espace $\mathscr{V}$ des point fixes de g est une droite affine dont la direction est V. Puisque $g = t_{u'} \circ \ell$ où $u' = \pi'(v)$, $\pi' = \frac{1}{2}(\ell - 1)$, on a en fait $\mathscr{V} = t_{u'/2}(V)$, d'où :

$$\mathscr{V} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

(On aurait aussi pu calculer un point fixe en utilisant l'expression de g en coordonnées).

Exercice 9

Enoncé. Soit ℓ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui envoie (x, y) sur $(x + y, y)$.

a) Déterminez Ker $(\ell - \mathrm{Id})$ et Im $(\ell - \mathrm{Id})$; l'espace $\mathbb{R}^2$ est-il somme directe de ces deux sous-espaces ?

b) Donnez un exemple d'une application affine f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont l'application linéaire associée est ℓ et telle que pour tout $u \in$ Ker $(\ell - \mathrm{Id})$ l'application $t_u \circ f$ soit sans point fixe.

Corrigé.

(a). On voit immédiatement que $\ker(\ell - Id) = \mathbb{R} \times 0 = \mathrm{Im}(\ell - Id)$. Ces deux espaces ne sont pas en somme directe.

(b). On cherche f sous la forme $t_v \circ \ell$; il est clair que la propriété demandée ne dépend que de la projection de v sur un complémentaire de $\ker(\ell - Id)$, on va donc vérifier que $v = (0, 1)$ marche. On a $f(x, y) = (x+y, y+1)$, donc $f(x, y) = (x, y)$ implique $y = y + 1$, i.e. $0 = 1$ ce qui n'est pas possible.