Université Pierre & Marie Curie
Année 2012-2013

Licence de mathématiques 3
Module 323

Contrôle Continu 3 - 17/04/2013

Exercice 1 (question de cours) :

Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E.

(1) Définir l'adjoint de u.

(2) Si u est auto-adjoint, que peut-on dire de sa matrice dans une base orthonormée quelconque ? Que peut-on dire de sa matrice dans une base orthonormée bien choisie ?

(3) Quels sont les endomorphismes u de E qui sont des isométries auto-adjointes ?

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine et (A, B, C) un repère de $\mathcal{E}$.

(1) Montrer à l'aide de la notion de barycentre qu'il existe une unique application affine u de $\mathcal{E}$ dans lui-même vérifiant $u(A) = B, u(B) = C$ et $u(C) = A$.

(2) Déterminer les points fixes de u.

(3) Donner l'expression cartésienne de u dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 3 :

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure affine euclidienne usuelle. Soit a, b deux nombres réels et $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f_{a,b}(x, y) = (x/2 + ay + 1, \sqrt{3}x/2 + by - 1)$$

(1) Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles $f_{a,b}$ est une isométrie directe. Décrire alors f.

(2) Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles $f_{a,b}$ est une isométrie indirecte. Décrire alors f.

Exercice 4 :

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. On appelle retournement d'axe D la symétrie orthogonale par rapport à D.

(1) Montrer que toute rotation est le produit de deux retournements.

(2) Montrer que deux retournements commutent si et seulement si leurs axes sont confondus ou orthogonaux.

(3) Montrer que deux rotations commutent si et seulement si elles ont le même axe ou si ce sont deux retournements d'axes orthogonaux.