Université Pierre & Marie Curie — Licence de Mathématiques L3
UE LM367 – Analyse complexe — Année 2013

TD 1.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(1+i)z - 1 = 0$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{n-1} = \overline{z}$ d'inconnue z et de paramètre $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Montrer que l'application

$$f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

définit une bijection du demi plan de Poincaré $P = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$ sur le disque unité $D(0,1)$. Expliciter son application réciproque.

Exercice 4.

(1) Montrer que la série entière de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

(2) On note $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ sa somme. Montrer que l'on a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

(3) Résoudre $e^z = w$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 5. On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

(1) Résoudre l'équation $\sin(z) = w$ pour $w \in \mathbb{C}$.

Exercice 6. Soit $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$ un polynôme de degré n et $P'(z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i a_i z^{i-1}$ le polynôme dérivé. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, montrer que P est $\mathbb{C}-$dérivable en z_0 et que $\dfrac{\partial P}{\partial z}(z_0) = P'(z_0)$.

Exercice 7. Soit $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$ un polynôme de degré $n \geq 1$.

(1) Montrer que $P(z) \sim a_n z^n$ quand $|z| \to +\infty$. En déduire que $|P| : z \mapsto |P(z)|$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$.

(2) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ en lequel le minimum de $|P|$ est atteint. On suppose que z_0 est racine d'ordre $k \geq 1$ de $z \mapsto P(z) - P(z_0)$ en z_0 i.e. $P^{(i)}(z_0) = 0$ si $1 \leq i < k$ et $P^{(k)}(z_0) \neq 0$. On note alors $P^{(k)}(z_0) = \rho e^{i\theta_0}$ la forme polaire de $P^{(k)}(z_0)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé.

Calculer un développement limité à l'ordre k de $\epsilon \mapsto P(z_0 + \epsilon e^{-i\frac{\theta_0}{k} + i\frac{\theta}{k}})$ quand ϵ tend vers zéro.

(3) En déduire que si $P(z_0) \neq 0$ alors $|P(z_0)|$ n'est pas un minimum de $|P|$.

(4) En déduire le théorème de D'Alembert-Gauss.

Exercice 8.

(1) Soit $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$ linéaire de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Montrer que α est $\mathbb{C}$ linéaire ssi α est la multiplication par $\alpha(1)$ ssi $c = -b$, $d = a$.

(2) En déduire qu'une application $\mathbb{C}$ dérivable en un point vérifie les équations de Cauchy Riemann.

(3) Montrer que la fonction $f(x,y) = 1$ si $x.y = 0$ et nulle ailleurs vérifie les équations de Cauchy Riemann en 0, mais n'est pas continue en 0.

Exercice 9. Discuter les points de $\mathbb{C}-$diffèrentiabilité des fonctions suivantes.
$z \mapsto |z|^2$; $z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$, $z \neq i$; $z \mapsto |z| - z$; $z = x + iy \mapsto x + iy^2$

Exercice 10. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Mq chacune des propriétés suivantes entraine que f est constante:
a) f est constante b) Re(f) est constante c) Im(f) est constante c) $\overline{f} \in \mathcal{O}(U)$ d) L'image de f est contenue dans une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11.

(1) Montrer que $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et calculer sa dérivée.
(2) Montrer que la composée de deux fonctions holomorphes, lorsqu'elle est définie, est holomorphe.

Exercice 12. On rappelle que si F est une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{C}$,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) \;\&\; \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right) \;;$$

on note dz et $d\overline{z}$ les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies pour tout $w \in \mathbb{C}$ par $dz.w = w$ et $d\overline{z}.w = \overline{w}$.

(1) Exprimer la différentielle réelle DF de F en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial z}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \overline{z}}$, dz et $d\overline{z}$. A quelle condition nécessaire et suffisante F est-elle holomorphe sur U et dans ce cas, que vaut F' ?
(2) Soit f une application de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}$.
(3) Prouver que

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \;\&\; \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

Exercice 13. (Facultatif.)

(1) Prouver que si g est une application de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{C}$ et si $f(U) \subset V$, alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial z}(f)\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f)\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial g}{\partial z}(f)\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f)\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \end{cases}$$

(2) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Montrer que l'application φ, de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$, est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

Exercice 14.

(1) Montrer sans utiliser les formules ci-dessus que si f et g sont holomorphes, $g \circ f$ est holomorphe et que $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$.
(2) Vérifier que le déterminant du jacobien d'une fonction holomorphe f est $|f'|^2$.

Exercice 15.

(1) Montrer qu'un disque ouvert est un ouvert, qu'un disque fermé est fermé. Quelle est la fontière d'un disque ?
(2) Donner les points d'adhérence, les points isolés et les points d'accumulations de l'ensemble $\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 16. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Un sous-ensemble A de U est dit localement fini si tout x de U admet un voisinage $D(x,\epsilon) \subset U$ tel que $D(x,\epsilon) \cap A$ est fini.

(1) L'ensemble $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ est-il localement fini dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{C}^*$?
(2) Montrer que si A est localement fini dans U ssi pour tout compact $K \subset U$, l'ensemble $K \cap A$ est fini.
(3) Montrer qu'un sous-ensemble fermé et discret de U est localement fini.

Exercice 17. Soit $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
(1) Montrer que $\lim\limits_{y \to 0^+} \int_{[0,1]} f(x,y)dx = \int_{[0,1]} f(x,0)dx$

Exercice 18. Montrer les propriétés suivantes de la fonctions distance à un ensemble.
1) Si A est une partie non vide d'un espace métrique (X,d), alors la fonction $X \ni x \mapsto d(x,A) = \inf\{d(x,a),\, a \in A\}$ est $1-$lipschitzienne:

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)\,.$$

2) Montrer que $\overline{A} = \{x \in X, \text{ tel que } d(x,A) = 0\}$, donc A est fermé ssi $[d(x,A) = 0 \Rightarrow x \in A]$.
3) Si B est une autre partie non vide de X, on pose $d(A,B) = d(B,A) := \inf\{d(x,y),\, x \in X,\, y \in Y\} = \inf\limits_{x \in A} d(x,B) = \inf\limits_{y \in B} d(y,A) = d(\overline{A}, \overline{B})$.

Montrer que si B est compact, il existe $b \in B$ tel que $d(b,A) = d(B,A)$ (l'inf. est un min.). En déduire que si A est fermé, B compact et $A \cap B = \emptyset$ alors $d(A,B) > 0$.
(1) Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$, et K un compact de U. Montrer que $d(K, \partial U) > 0$. En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $K_\epsilon = K + D(0,\epsilon) \subset U$.
4) Soit $\epsilon > 0$. Alors $A_\epsilon = \{x \in X, d(x,A) < \epsilon\} = \bigcup\limits_{a \in A} B(a,\epsilon)$ est un ouvert. Si A, B sont deux parties de X telles que $d(A,B) = 2\epsilon > 0$ alors A_ϵ et B_ϵ sont deux ouverts qui séparent A et B ($A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$).

Exercice 19.